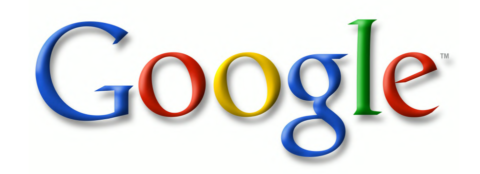
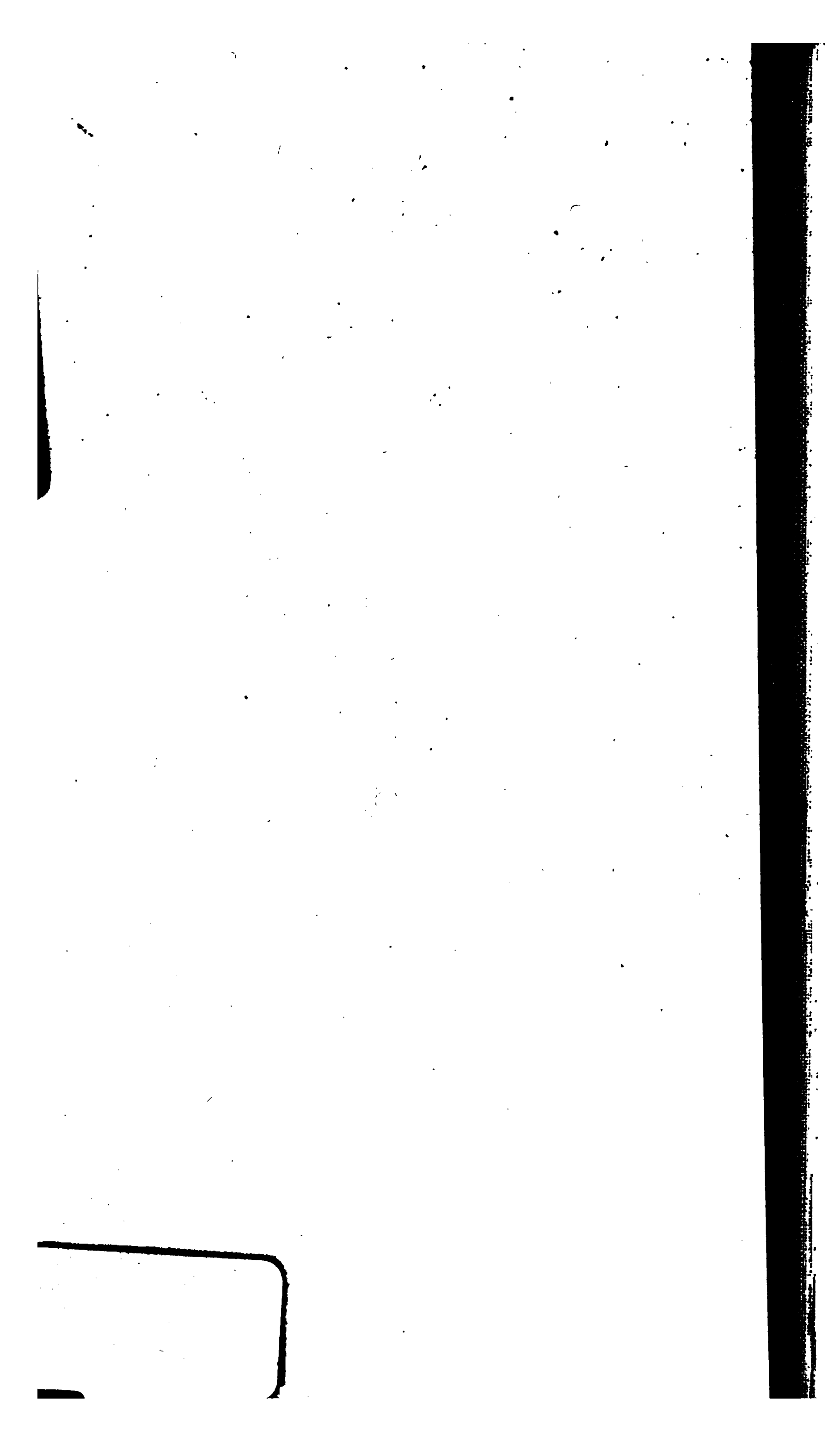




GÉOMÉTRIE

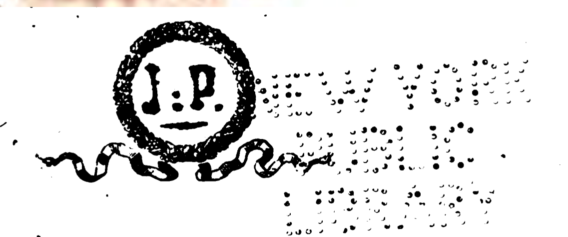
ÉLÉMENTAIRE

BASÉE SUR LA THÉORIE DES INFINIMENT-PETITS,

PAR

P. J. E. FINCK,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, AGRÉGÉ AUX CLASSES DES SCIENCES DANS L'UNIVERSITÉ, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DANS LES COLLÉGES ROYAUX, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE, DOCTEUR ÈS-SCIENCES.



STRASBOURG,

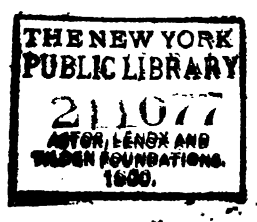
CHEZ DERIVAUX, LIBRAIRE, RUE DES HALLEBARDES, 23.

PARIS,

MATHIAS, LIBRAIRE, QUAI MALAQUAIS, 15.

LAGNY FRÈRES, LIBRAIRES, RUE BOURBON-LE-CHATEAU, 1.

1838.



STRASBOURG, IMPRIMERIE DE G. SILBERMANN.

PRÉFACE.

Cet ouvrage est destiné aux personnes qui se proposent d'étudier la géométrie d'une manière approfondie, ainsi qu'à celles qui n'ont besoin que des premières notions de cette science. Le texte proprement dit, contient tout ce qui est nécessaire aux classes préparatoires des colléges royaux, aux écoles industrielles, aux écoles régimentaires. En y joignant les parties imprimées en petits caractères, on a un cours plus complet, suffisant pour la première année de philosophie des colléges royaux, suffisant même, à la rigueur, aux candidats à l'école polytechnique, lesquels, cependant, feront bien de lire aussi les parties marquées d'un astérisque, quoique celles-ci ne contiennent que des théories restées jusqu'ici en dehors des programmes des examens. De ce nombre sont les éléments des *transversales*, des *axes radicaux*, etc., qui fournissent des moyens simples et élégants pour la résolution d'une foule de problèmes curieux et utiles.

Les propriétés du cercle et des corps ronds, le passage du commensurable à l'incommensurable, sont traités par la méthode des infiniment petits. Déja, dans le manuscrit de cet ouvrage, présenté à Son Excellence le ministre de l'instruction publique en 1835, l'auteur avait adopté cette méthode qui, du

reste, lui sert de base dans l'enseignement de la géométrie depuis plus de quinze ans. Il n'a donc pu qu'applaudir à un arrêté récent par lequel Son Excellence a décidé que dorénavant, dans les colléges royaux, la méthode des infiniment-petits doit être employée exclusivement. On verra d'ailleurs, qu'elle est aussi rigoureuse que la réduction à l'absurde, mais qu'elle a l'avantage d'être plus simple, parce qu'elle est susceptible d'être réduite en principes généraux. C'est en grande partie à l'abréviation qu'elle a procurée, qu'est due le peu d'étendue de ce volume dont le cadre, cependant, est loin d'être au-dessous d'un traité élémentaire. L'auteur doit d'ailleurs être regardé comme seul responsable par rapport à la manière dont la théorie des infiniment-petits est exposée ici.

En établissant les divisions de cet ouvrage, l'auteur est resté convaincu qu'il est impossible de satisfaire tous les lecteurs sous ce rapport. En effet, dans un sujet où les matières se touchent par tant de faces, se tiennent par un si grand nombre de fils, il est impossible de ranger les vérités dans une *série linéaire*, sans rompre quelques-uns de ces fils, au moins en apparence. Or, tel lecteur attachera plus d'importance à telle liaison qu'à telle autre; il faudrait donc disposer les théorèmes de géométrie sur une surface et non pas à la suite l'un de l'autre, si l'on voulait faire ressortir *matériellement* leur enchaînement mutuel.

Au lieu d'entrer ici dans des détails que la lecture de l'ouvrage fera mieux connaître, on se contentera de dire que l'on a tâché d'adopter des divisions qui,

en groupant ensemble les matières qui offrent le plus d'analogie, soulagent la mémoire de l'élève et le conduisent du simple au composé. Ainsi, en séparant la géométrie de l'espace de celle du plan, on a distingué dans celle-ci une série de propriétés indépendantes de la notion du *rapport*; l'idée de position relative y est dominante. Ces propriétés se rapportent les unes exclusivement à la droite, les autres à la droite et au cercle ou aux cercles combinés entre eux. On en a fait l'objet des deux premiers livres qui peuvent être compris sans le secours de l'arithmétique; ils sont d'ailleurs plus faciles que cette dernière science. Dans le premier livre on trouvera la théorie des parallèles appuyée sur le *postulatum* d'Euclide et sur un théorème (9) dû à Schwab. Cette marche a semblé nécessaire à l'auteur, parce que les idées de Bertrand de Genève, tout ingénieuses qu'elles sont, ne lui ont pas paru suffisamment rigoureuses. On remarquera encore que les définitions n'ont pas été prodiguées; il faut éviter d'expliquer des termes au moyen d'autres qui sont moins clairs. Qui est-ce qui définirait, par exemple, ce que c'est que la longueur?

A l'idée de la position relative se joint celle du rapport d'étendue linéaire. Cette combinaison est l'objet du troisième livre qui commence par la théorie élémentaire des infiniment-petits, et se trouve d'ailleurs indépendant de la notion de l'aire. On y trouvera la similitude exposée d'après une théorie qui est nouvelle, quoique l'idée-mère de cette théorie ne le soit pas; elle a été indiquée, il y a longtemps, dans les annales

de mathématiques. Cette manière d'établir la similitude nous paraît la plus simple; car elle n'exige qu'une seule définition, au lieu de cinq ou six que Legendre a adoptées. Ensuite de cela, l'uniformité est complète sur le plan et dans l'espace. La proposition 8 donne une construction élégante pour diviser les longueurs; elle est due à M. [illegible], proviseur du collége royal de Metz. Dans ce même livre on trouvera la déterminaison du rapport approché de la circonférence au diamètre d'après la méthode de Descartes retrouvée par Schwab. Nous avons ajouté à cette méthode une discussion qui montre ce qu'il y a à faire pour obtenir ce rapport avec une approximation donnée. La théorie élémentaire des transversales termine le livre 3.

Dans le quatrième on ramène les rapports des aires planes à des rapports de lignes. La manière générale dont se trouve présentée la proposition 1 de ce livre, ainsi que le corollaire 2, est due à M. l'inspecteur général Poullet-Delisle, qui a fait au Conseil royal le rapport sur le manuscrit de cette géométrie; nous n'avions démontré cette propriété que pour des rectangles. Trois problèmes numériques, accompagnés de discussions importantes, se rattachent à ce livre terminé par la théorie des axes radicaux, et par le cercle tangent à trois autres.

L'auteur n'a pas jugé utile d'établir dans la géométrie de l'espace des divisions correspondantes à celles de la géométrie plane. La raison qui l'a décidé, c'est que la proportionnalité des longueurs, qui a dû être établie dans celle-ci, ne forme plus qu'un objet

d'applications dans celle-là. Ainsi la considération des rapports d'étendue linéaire n'ayant plus ici la même importance, n'a plus semblé devoir être regardée comme base de la division. On a procédé du simple au composé, en distinguant la théorie des plans, celle des polyèdres, celle des surfaces courbes élémentaires.

Dans la théorie des plans qui forme le cinquième livre, on trouve une définition des plans perpendiculaires analogue à celle des droites perpendiculaires. Il en résulte un peu de simplification. Dans cette partie plusieurs démonstrations par l'absurde ont été remplacées par des démonstrations directes, dues, ainsi que quelques autres améliorations, à l'obligeance de M. Poullet Delisle Ayant reconnu par l'expérience de l'enseignement une lacune dans les explications que Legendre donne sur les angles polyèdres symétriques, nous avons cherché à compléter cette partie, ainsi que la théorie des plans en général.

Le sixième livre, ou la théorie des polyèdres, diffère à peu près totalement de celui de Legendre. La symétrie a été simplifiée, la similitude traitée comme on l'a dit plus haut; le volume des parallélipipèdes et des prismes ramené à deux propositions. Dans le volume de la pyramide on a emprunté le secours des infiniment-petits; dans celui du tronc de prisme triangulaire on a rétabli la marche de Bezout.

Le septième livre contient quelques généralités sur les surfaces cylindriques, les surfaces coniques et les surfaces de révolution. La similitude de ces surfaces

n'est qu'un cas particulier de ce qui a été établi antérieurement. La mesure des triangles sphériques a été simplifiée d'après une remarque faite sur les triangles, ou plutôt sur les angles trièdres symétriques. Ici se rattachent aussi quelques problèmes numériques. L'ouvrage est terminé par les énoncés d'un bon nombre de questions à résoudre.

EXPLICATION

DE QUELQUES TERMES, SIGNES, ETC.

Un *axiome* est une proposition évidente sans le secours d'aucun raisonnement. Telles sont les suivantes :

1° Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ;

2° Une grandeur est égale à la somme de toutes ses parties ;

3° Une grandeur [illegible] grande qu'une de ses parties.

Un *théorème* est [illegible]sition dont la vérité devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration.*

Un *problème* est une question à résoudre.

Corollaire est la même chose que conséquence.

Postulatum ou *demande* est une supposition que l'on fait en la regardant comme vraie sans la démontrer.

Pour indiquer l'addition de deux grandeurs A et B, on les sépare par le signe +, *plus*, ... $A + B$.

La soustraction s'indique par le signe —, *moins*, ... $A - B$.

La multiplication de A par B s'indique ainsi :

$$A \times B \quad \text{ou} \quad A . B$$

Pour indiquer la multiplication de A par $B + C - D$ on écrit

$$A \times (B + C - D) \quad \text{ou} \quad A (B + C + D)$$

Les signes ×, ., et les parenthèses dans ce cas, s'énoncent : *multiplié par.*

Les expressions $3\,A$, $\frac{1}{2}A$.... signifient le triple de A, la moitié de A.

Le produit d'une grandeur A par elle-même, c'est-à-dire $A \times A$, s'indique aussi par $\overline{A}^2$; le produit de trois facteurs égaux à A, ou $A \times A \times A$, se représente par $\overline{A}^3$.

Le signe = signifie *égal à.*

>	*plus grand que* ou *supérieur à.*
<	*plus petit que* ou *inférieur à.*
√	*racine carrée de.*

AVIS ESSENTIEL.

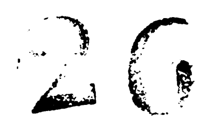


Quiconque ne voudra apprendre que les vérités de la Géométrie les plus utiles, exposées de la manière la plus simple, pourra passer tout ce qui est imprimé en petits caractères, et s'arrêter, dans le 7ᵉ livre, à la prop. 25, ou du moins à la prop. 30.

Les candidats des écoles spéciales peuvent passer les articles marqués d'un astérisque ; cependant les jeunes gens qui se destinent à l'école polytechnique feront bien de les lire lorsque le reste de la géométrie leur sera familier.

Enfin ceux qui voudront restreindre les applications des infiniment-petits, pourront le faire d'après une note qu'ils trouveront à la fin de l'ouvrage.

Dans les renvois entre parenthèses *l.* signifie livre, *d.* définition, *p.* proposition, *c.* corollaire, *r.* remarque. Les renvois sans indication de livre se rapportent au livre courant.



GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.



LIVRE Ier.

LA LIGNE DROITE.

Tout le monde sait ce que c'est qu'un *corps*. On peut imaginer des corps plus ou moins grands : car deux corps forment un tout plus grand que chacun d'eux.

On sait aussi ce que c'est que la *surface* d'un corps. On peut considérer une partie d'une surface, laquelle partie peut être plus ou moins grande.

Définition i. Si l'on divise une surface en deux parties, la limite qui les sépare l'une de l'autre se nomme *ligne*. Il y a des lignes plus ou moins *longues*; elles peuvent avoir des *formes* différentes.

Définition ii. L'objet de la géométrie est d'étudier et d'établir les propriétés des lignes, des surfaces, des corps, quant à leur grandeur relative et à leur forme.

Définition iii. La propriété des corps, des surfaces, des lignes, d'être plus ou moins grands, constitue *l'étendue*. D'après cela la géométrie s'appelle la *science de l'étendue*.

Définition iv. Si une ligne se termine, ses extrémités se nomment des *points ;* on appelle encore *point* l'endroit où deux lignes se coupent.

Définition v. D'un point à un autre on peut concevoir une infinité de lignes de formes et de longueurs diverses. Parmi toutes ces lignes il y en a une dont nous acquérons une idée nette par l'expérience : c'est la *ligne* droite *qui est la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener d'un point à un autre;* de plus d'un point à un autre on ne peut concevoir qu'une seule ligne droite, ce que l'on exprime en disant que *deux points déterminent une droite.* Enfin, une ligne droite ne peut se prolonger que d'une seule manière dans chaque sens.

Définition vi. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, se nomme une *ligne courbe.*

Définition vii. On appelle *plan* une surface à laquelle une ligne droite peut s'appliquer dans tous les sens, de telle façon que, dès qu'elle passe par deux points pris dans le plan, elle s'y trouve tout entière.

Définition viii. Toute surface qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes est appelée *surface courbe.*

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Deux plans qui ont trois points communs non situés en ligne droite se confondent dans toute leur étendue.

Fig. 1. En effet, supposons que les trois points A, B, C, qui ne sont pas en ligne droite, soient à la fois contenus dans deux plans; si l'on tire la droite AB elle aura deux points, A, B, dans chacun de ces deux plans, et sera par conséquent (d. 7) tout entière dans chacun; il en est de même de la droite qui joint les points A et C. Cela posé, soit pris dans le premier de nos deux plans un point quelconque E; je dis que ce point est aussi dans le second plan. Car prenez sur AB, de l'autre côté de AC, par rapport au point E, un point quelconque D, et tirez la droite DE; cette droite sera tout entière dans

le premier plan ; car le point E par hypothèse est pris dans ce plan ; le point D y est puisqu'il est sur la droite AB qui elle-même y est tout entière ; donc la droite DE, qui a deux points D, E, dans le premier plan, y est aussi tout entière ; elle coupera donc la droite AC en un point F. Mais AC est ausi dans le second plan, par conséquent le point F est un point du second plan ; le point D aussi, puisque AB est aussi dans ce plan. Par conséquent la droite DF est dans le second plan, et son point E est également dans ce second plan. Il est donc prouvé que tout point E du premier plan appartient aussi au second, et que, par suite, ces deux plans n'en font qu'un seul.

Remarque. Dans les quatre premiers livres toutes les figures seront supposées planes.

Définition ix. Deux droites AB, AC, qui sont situées dans un même plan et se coupent en un point A, forment entre elles un *angle;* le point A se nomme le *sommet* de l'angle ; les droites AB, AC se nomment les *côtés*. Fig. 2.

Pour se faire une idée nette de l'angle, on n'a qu'à supposer que la droite AB, d'abord couchée sur AC et ne faisant qu'une seule et même droite avec celle-ci, tourne autour du point A, tandis que AC reste fixe ; à mesure que AB tourne, l'angle qu'elle fait avec AC augmente.

L'angle se désigne par trois lettres dont une placée au sommet et les deux autres sur les côtés ; la lettre du sommet se place entre les deux autres. Ainsi, l'angle formé par AB et AC se nomme *l'angle* BAC.

Soit un second angle *bac*, plaçons le côté *ac* sur AC de façon que le point *a* tombe sur A ; le point *c* tombera quelque part en E. Si l'on couche le plan *bac* sur le plan BAC, trois cas pourront se présenter : 1° le côté *ab* peut tomber sur AB, de sorte que *b* vienne tomber en un point F ; dans ce cas on dit que l'angle *bac* est égal à l'angle BAC ; 2° le côté *ab* peut tomber entre AB et AC, par exemple, sur AD ; et dans ce cas l'angle *bac* est dit plus petit que BAC qui est la somme des angles BAD, DAC ; 3° enfin, si le côté

ab tombe hors de l'angle BAC, en AG je suppose, l'angle *bac* sera dit plus grand que BAC. On voit donc que l'on compare les angles sans avoir égard à la longueur de leurs côtés.

Au lieu de désigner un angle par trois lettres, on peut le désigner par la seule lettre du sommet, s'il n'y en a qu'un qui ait son sommet au même point : ainsi on peut dire l'angle *a*.

Fig. 3. *Définition* x. Si une droite AB fait avec une droite DC deux angles adjacents BAD, BAC, égaux entre eux, chacun de ces angles est appelé *angle droit*, et la droite BA est dite *perpendiculaire* à DC.

Remarque. Supposons, comme plus haut, que la droite AB, d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A dans le plan BDC, pour s'élever au-dessus de AC; cette droite mobile fera d'abord avec AC un angle plus petit qu'avec AD; mais à mesure qu'elle tournera, elle s'écartera de AC pour se rapprocher de AD, ou, en d'autres termes, l'angle qu'elle fait avec AC augmentera, tandis que celui qu'elle fait avec AD ira en diminuant, de sorte qu'elle finira par prendre une position AM telle que l'angle MAC sera plus grand que MAD. On conçoit donc qu'il existe pour cette droite mobile, au-dessus de AC, une position unique telle que AB, où elle fera, avec AC et AD, des angles égaux; c'est lorsque la droite mobile a pris cette position AB qu'elle est perpendiculaire à DC. Ainsi, à tout point A pris sur DC, il existe une perpendiculaire AB élevée sur DC, mais il est impossible de trouver du même côté de DC une seconde perpendiculaire menée par le point A dans le plan DBC, sur DC.

De plus, si la droite FH est perpendiculaire à GI, qu'on place le point F sur A de façon que la droite GI prenne la direction de DC et que le plan HGI tombe sur le plan DBC, on voit que FH doit tomber sur AB. Car si FH prenait une

autre direction, telle que AE, comme la droite GI à laquelle FH est perpendiculaire, tombe sur DC, il s'ensuit que AE serait perpendiculaire à DC en A; mais AB l'est aussi, et au point A il n'y a qu'une seule perpendiculaire sur DC. Ainsi FH prendra la direction de AB, et l'angle HFI est égal à l'angle BAC, ce qui prouve que tous les angles droits sont égaux.

Définition xi. Tout angle EAC plus petit qu'un angle droit est appelé angle *aigu*. Tout angle EAD, plus grand qu'un angle droit, est appelé angle *obtus*. Fig. 3.

Définition xii. Deux angles dont la somme est égale à deux angles droits sont dits *supplémentaires ;* on dit encore que l'un est le *supplément* de l'autre.

Remarque 1. Deux angles qui ont le même supplément sont évidemment égaux.

Remarque 2. Le supplément d'un angle droit est lui-même un angle droit.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Toutes les fois qu'une ligne droite CD *en rencontre une autre* AB, *les angles adjacents* ADC, CDB, *sont supplémentaires.* Fig. 4.

Car si au point D on mène la droite DE perpendiculaire à AB, l'angle ADC se composera de ADE + EDC; donc ADC + CDB = ADE + EDC + CDB; or ADE est un angle droit; EDC + CDB forme l'angle droit EDB; donc ADC + CDB vaut deux angles droits.

Corollaire 1. Si l'un des deux angles adjacents était droit, l'autre le serait aussi (d. 12, r. 2). Par conséquent, pour qu'une droite HF soit perpendiculaire à une autre GI, il suffit que l'un des deux angles adjacents GFH, IFH soit droit, puisque dès lors l'autre l'est aussi (d. 10). Fig. 3.

Donc si une droite FH est perpendiculaire à une autre GI, réciproquement GF est aussi perpendiculaire à HK; car HF étant perpendiculaire à GI, l'angle GFH est droit, ce qui suffit pour que GF soit perpendiculaire à HK.

Fig. 4. *Remarque.* Si du point D on tire du même côté de AB tant de droites qu'on voudra, la somme des angles consécutifs ADH, HDG, GDC, etc., est la même que celle des deux angles droits ADE, EDB.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Fig. 4. *Réciproquement si deux angles adjacents* ADC, CDB, *font en somme deux angles droits, les côtés extérieurs* AD, DB *seront en ligne droite.*

Car si DB n'était pas le prolongement de AD, soit DK ce prolongement; la ligne ADK serait droite, et la somme des angles ADC + ADK serait égale à deux droits; mais si cela était, la somme ADC + CDB serait plus petite que deux droits, ce qui n'est pas. Donc DK ne saurait être le prolongement de AD. Donc DB est ce prolongement.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Si deux droites AB, CE, *se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.*

Fig. 5. En effet AB étant une ligne droite, l'angle ADC est supplémentaire de CDB (p. 2); par une raison semblable le même angle ADC est supplémentaire de ADE; donc les deux angles ADE, CDB ont le même supplément et sont égaux (d. 12, r. 1). On prouve de même que ADC = BDE.

Remarque 1. La somme des 4 angles formés autour du

point D vaut 4 angles droits. Car (p. 2) la somme des angles ADC + CDB vaut 2 droits, de même que la somme des angles ADE + EDB.

En général si d'un point D on mène, dans différentes directions, tant de droites qu'on voudra, la somme des angles consécutifs ainsi formés sera la même que celle des angles ADC, CDB, BDE, EDA, laquelle vaut quatre angles droits.

Définition xiii. Une portion de plan ABC terminée par trois droites qui se coupent deux à deux, se nomme *triangle.* Fig. 6.

Définition xiv. Le triangle qui a deux côtés égaux (AB=AC) est appelé *triangle isoscèle.* Fig. 7.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Deux triangles ABC, DEF, *sont égaux, s'ils ont un angle égal* (A=D), *compris entre deux côtés égaux chacun à chacun*, savoir AB=DE, AC=DF. Fig. 8.

En effet, placez le côté DF sur son égal AC, de façon que le point D tombe en A, le point F en C. Puisque l'angle D=A, le côté DE prendra la direction de AB, et comme DE = AB, le point E tombera en B, de sorte que le triangle DEF coïncide complétement avec le triangle ABC. Ces deux triangles sont donc égaux, et l'on aura aussi BC = EF, B = E, C=F.

Corollaire. Si AB est égal à AC, et DE à DF, de sorte que les deux triangles soient isoscèles, on peut les superposer d'une seconde manière, et ce, en plaçant le côté DF sur AB et le côté DE sur AC; par conséquent, l'angle F sera égal à B; mais F est déjà égal à C par ce qu'on vient de prouver. Donc les angles B et C, égaux à un même angle F,

sont égaux entre eux. Ainsi, *dans un triangle isoscèle, les angles* B et C, *opposés aux côtés égaux* AC, BC, *sont égaux.*

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Fig. 8. *Deux triangles* ABC, DEF, *sont égaux, s'ils ont un côté égal* (BC = EF) *adjacent à deux angles égaux chacun à chacun,* savoir B = E, C = F.

Placez le côté EF sur son égal BC, de manière que le point E tombe en B, le point F en C. Puisque l'angle E = B, le côté ED prendra la direction de BA, et le point D tombera quelque part sur BA; de même, puisque l'angle F = C, le côté FD prendra la direction de CA et le point D tombera quelque part sur CA. Donc le point D, devant tomber à la fois sur BA et sur CA, tombera en A; ainsi les deux triangles coïncideront, seront égaux et l'angle A sera égal à D, le côté BA à ED et le côté CA à FD.

Corollaire. Si de plus on suppose l'angle C = B et l'angle F = E, on pourra superposer les deux triangles d'une seconde manière. A cet effet on place le point E en C et le point F en B; puisque les quatre angles B, C, E, F sont égaux, le côté FD se dirigera sur BA, le côté ED sur CA, les deux triangles coïncideront, et le côté FD sera égal à BA; mais FD est déjà égal à CA, donc BA et CA sont égaux. Par conséquent, *si dans un triangle* ABC, *deux angles* B et C *sont égaux, les côtés* AC, AB, *opposés à ces angles, sont aussi égaux, et le triangle est isoscèle.*

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Fig. 9. *Si deux côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC *sont respectivement égaux à deux côtés* AD, AC *d'un second triangle*

ADC; *si de ~~plus~~ l'angle* BAC *que comprennent les deux premiers côtés est plus grand que l'angle* DAC *compris par les deux derniers, je dis que le troisième côté* BC *du premier triangle est plus grand que le troisième côté* DC *du second.*

Après avoir placé les deux triangles de façon que l'un des côtés égaux soit commun, divisez l'angle total BAD en deux parties égales par une droite AE. Puisque l'angle BAC est plus grand que l'angle CAD, cette droite AE passera dans l'angle BAC et coupera la droite BC en un point E; joignez DE. Actuellement, quelle que soit la ligne DCE, qu'elle soit droite ou brisée, CD sera plus petit que CE + ED. Mais les triangles BAE, EAD ont les angles BAE, EAD égaux comme moitiés du même angle, le côté AE commun, le côté AB = AD par hypothèse. Donc (p. 5), ils sont égaux et le côté ED = EB. Par conséquent CD, qui est plus petit que CE + ED, est aussi plus petit que CE + EB ou que CB.

Corollaire. Réciproquement *si les côtés* AB, AC *sont respectivement égaux à* AD, AC; *si de plus le côté* BC *est plus grand que le côté* CD, *je dis que l'angle* BAC *est plus grand que* DAC. Car si l'angle BAC était plus petit que DAC, comme AC est commun, et que BA = AD, le côté BC serait, d'après ce qu'on vient de prouver, plus petit que CD, ce qui est faux; et si l'angle BAC était égal à DAC, les deux triangles auraient un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ainsi ils seraient égaux (p. 5) et le côté BC serait égal à DC, ce qui est encore faux. Donc enfin l'angle BAC est plus grand que DAC.

Proposition 8.

[D]eux triangles sont égaux, s'ils ont les trois Côtés égaux chacun à chacun. [So]ient les triangles ABC, AB'C, placés de façon qu'un Côté égal soit Commun; les [so]mmets B et B' tombant l'un ~~sur l'autre~~ au dessus, l'autre au dessous de le Côté Commun AC. supposons du reste AB = AB', BC = B'C. si l'on tire [B]B', les triangles ABB', BCB' seront isocèles, donc angle ABB' = AB'B, angle [BC]A = B'CA, et par suite angle ABC = AB'C, donc les deux triangles sont égaux.

B
A
C
m
B'

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Deux droites perpendiculaires à une même troisième droite, ne sauraient se rencontrer, ni sur cette troisième, ni au dehors.

En effet, si elles se rencontraient sur la troisième, on pourrait, au point de rencontre, élever à celle-ci deux perpendiculaires différentes, ce qui est impossible (d. 10, r.).

Fig. 12. En second lieu, si deux droites AB, CD, perpendiculaires à une même troisième droite EF, pouvaient se rencontrer hors de la droite EF, ces deux droites AB, CD formeraient avec EF un triangle dans lequel les deux angles BEF, DFE seraient droits, ce qui est impossible. Donc AB et CD ne se rencontrent pas.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Fig. 13. *Si d'un point A, pris hors d'une droite BC, on mène sur cette droite une perpendiculaire AD, et différentes obliques AF, AE, AG, etc. :*

1° *La perpendiculaire AD sera plus courte que toute oblique AE, AG, etc.;*

2° *Deux obliques AE, AF, qui s'écartent de part et d'autre à égale distance du pied de la perpendiculaire sont égales.*

3° *De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus, est la plus longue.*

1° En effet, dans le triangle ADE, l'angle en D étant droit l'angle AED sera plus petit qu'un droit (p. 10, c.); donc

le côté AD, opposé à celui-ci, est plus petit que le côté AE opposé à l'autre (p. 9), c'est-à-dire, que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique.

2° Soient les deux distances égales DE, DF; je dis que les obliques AE, AF sont égales. Car les triangles ADE, ADF ont les angles en D égaux comme droits, le côté AD commun, le côté DE = DF par hypothèse; ainsi (p. 5) ces deux triangles sont égaux, et le côté AE = AF; donc les obliques également écartées de la perpendiculaire sont égales.

3° Soit DG > DF; je dis que AG sera > AF. Pour le prouver, prenons DE = DF, tirons AE. L'angle ADE étant droit, l'angle AED sera aigu et son adjacent AEG sera obtus; donc dans le triangle AEG, l'angle AGE sera aigu (p. 10, c.) et le côté AG, opposé au plus grand angle, sera plus grand que AE ou que AF.

Corollaire 1. Si deux obliques AE, AF sont égales, on peut conclure qu'elles s'écartent également de la perpendiculaire AD. Car si elles s'écartaient inégalement, elles ne seraient pas égales. De même, de deux obliques inégales, la plus longue s'écartera le plus de la perpendiculaire.

Corollaire 2. Dans un triangle isoscèle AEF la perpendiculaire AD menée du sommet A sur le côté inégal EF, divise ce côté ainsi que l'angle EAF en deux parties égales.

Corollaire 3. D'un point A pris hors d'une droite BC, on ne peut mener sur cette droite plus de deux droites égales. Car si du point A on mène deux obliques quelconques AE, AF égales entre elles, toute autre droite menée de A sur BC, s'écartera de la perpendiculaire plus ou moins que AE, et sera, par conséquent, plus ou moins longue que AE.

Remarque. La perpendiculaire menée d'un point A sur une droite BC étant la plus courte de toutes les droites menées de A sur BC, on la regarde comme la distance de ce point à cette même droite BC.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Fig. 14. *La perpendiculaire* DE, *élevée sur le milieu* C *d'une droite* AB *de longueur donnée, est le lieu de tous les points également éloignés des extrémités* A, B *de cette droite.*

Il s'agit de prouver que tous les points de la perpendiculaire DE sont également distants des extrémités A et B, et que tout point F pris hors de la perpendiculaire est inégalement distant de A et B. C'est là ce que signifie l'expression précédente.

Or, si l'on joint les points A et B à un point quelconque D de la perpendiculaire DE, les deux distances AC, BC étant égales, les deux obliques DA, DB le seront (p. 12, 2°). Il en est de même de EA, EB; donc, d'abord tout point de la perpendiculaire DE, menée au milieu de AB, est également distant des extrémités A et B.

En second lieu, si l'on joint les points A et B à un point quelconque F, pris hors de DE, par les droites AF, BF, l'une de ces droites coupera la perpendiculaire DE en un point D; joignez DB. La droite FB $<$ FD $+$ DB; mais le point D étant sur la perpendiculaire DE, on a DB $=$ DA; donc FB $<$ FD $+$ DA ou FA, et tout point pris hors de la perpendiculaire DE est inégalement distant des extrémités A, B.

Fig. 12. *Définition XVI.* Il a été démontré (p. 11, 2°) que deux droites BA, CD, perpendiculaires à une même troisième droite EF ne se rencontrent pas.

Deux droites BA, CD, qui sont situées dans le même plan et ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les prolonge, sont dites *parallèles.*

PROPOSITION XIV.

POSTULATUM.

D'un point E pris hors d'une droite CD, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite. Fig. 12.

Nous regardons cette propriété comme évidente. Ainsi les deux droites AB, CD, perpendiculaires à une même droite EF ne se rencontrent pas : nous admettons que toute droite différente de AB, et menée par un point E de cette droite, rencontrera DC ; ainsi les droites EK, EK′, qui ne sont pas perpendiculaires à EF, rencontreront DC, si on prolonge suffisamment DC ainsi que EK, EK′.

Corollaire. Si deux droites AB, CD, sont parallèles, toute droite EF, perpendiculaire à CD, l'est aussi à AB. Car si EF n'était pas perpendiculaire à AB, au point E on pourrait élever une droite perpendiculaire à EF ; cette prétendue perpendiculaire serait parallèle à CD ; mais AB est déjà parallèle à CD ; donc du même point E on pourrait mener deux parallèles à la droite CD, ce qui est impossible. Donc EF est perpendiculaire à AB.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Deux droites AB, CD, *sont parallèles si les angles intérieurs* BFG, FGD, *qu'elles font du même côté avec une troisième* EH, *sont supplémentaires.* Fig. 15.

En effet, l'angle DGH est aussi supplémentaire de DGF (p. 2), par conséquent il est égal à BFG. Si donc les lignes FB, GD, pouvaient se rencontrer à droite de FG, elles for-

meraient avec FG un triangle dans lequel un angle extérieur DGH serait égal à un angle intérieur opposé BFG, ce qui est impossible (p. 10). De plus, les angles AFG, GFB, valant ensemble 2 droits ainsi que CGF, FGD (p. 2), si de ces 4 angles qui font ainsi en somme 4 droits, on retranche les angles BFG, DGF, qui valent aussi 2 droits, on aura les angles AFG, CGF, qui vaudront également 2 droits, et l'on prouvera encore que les lignes BA, DC, ne sauraient se rencontrer à gauche de FG. Donc elles sont parallèles.

Remarque 1. On arrive à la même conséquence en supposant :

1° L'angle EFB = CGH, ou, ce qui revient au même, AFG = FGD. Car l'angle BFG, supplément de EFB (p. 2), ou de AFG, le sera aussi de son égal FGD. Ainsi les angles BFG, FGD, seront supplémentaires, et les droites AB, CD, parallèles;

2° L'angle AFE = DGH, ou, ce qui revient au même, BFG = CGF. Le raisonnement est le même que dans le premier cas;

3° Si l'on suppose l'angle EFB = EGD, on conclura que BFG, supplément du premier, l'est aussi du second, ce qui ramène à la Prop. 15. De même, si l'on suppose BFG = DGH, ou AFE = CGE, ou enfin AFH = CGH;

4° Si l'on suppose EFA, supplémentaire de CGH, on en conclura que BFG, égal au premier (p. 4), est supplément de FGD, égal au second (p. 4). De même si l'on suppose EFB supplémentaire de DGH.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Fig. 15. *Si deux parallèles* AB, CD, *sont coupées obliquement par une sécante* EH.

1° *Les 4 angles aigus formés par ces droites sont égaux ;*

2° les 4 angles obtus qu'elles forment le sont aussi; 3° chacun des 4 angles aigus est le supplément de l'un des 4 angles obtus:

1° Je dis que l'angle EFB est égal à EGD; car si cela n'était pas, faisons l'angle EFB' = EGD; d'après la Proposition précédente (r. 3°), la droite FB' serait parallèle à CD, ce qui ne se peut, puisque FB l'est déjà (p. 14). Donc l'angle EFB = EGD; donc aussi AFG, qui est égal à EFB (p. 4), sera égal à FGD; et par suite à son égal CGH (p. 4).

2° Il résulte de là que l'angle BFG = DGH, et par suite = CGF = AFE;

3° Puisque les angles obtus de la figure sont tous égaux à BFG, et les angles aigus à BFE qui est supplément de BFG (p. 2), on conclura que chacun des 4 angles obtus est le supplément de l'un quelconque des 4 angles aigus.

Remarque. En comparant ces angles on les distingue par leur position relativement à la sécante, en les appelant *angles alternes*, s'ils sont situés de différents côtés de cette droite, et *angles du même côté* dans le cas contraire. On les distingue encore en *angles intérieurs* ou *internes* s'ils sont traversés par l'une des parallèles, comme l'angle BFH traversé par CD, et *angles extérieurs* ou *externes*, dans le cas contraire; tel est l'angle EFB. D'après cela on peut dire:

1° Les angles AFH, DGE, sont *alternes internes* et égaux; de même BFG et CGE;

2° Les angles AFE, DGH, sont *alternes externes;* ils sont égaux. De même EFB, CGH;

3° Les angles EFB, EGD, sont *internes externes;* on les nomme encore *angles correspondants:* ils sont égaux. De même AFE et CGE, AFH et CGH, BFH et DGH;

4° Les angles *intérieurs d'un même côté* BFG, DGF, sont supplémentaires; il en est de même de AFG et CGF.

5° Les angles *extérieurs d'un même côté* EFB, DGH, sont supplémentaires; AFE et CGH sont dans le même cas.

Ces cinq propriétés sont toutes comprises dans la Proposition 16; leurs réciproques forment la Proposition 15 et la remarque qui y est jointe.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Fig. 16. *Deux angles qui ont les côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.*

1° Soient les angles BAC, DEF, ayant les AB, DE, parallèles et dirigés dans le même sens par rapport à la droite qui joindrait les sommets A et E; les côtés AC, EF sont aussi parallèles et de même sens. Ces angles sont égaux. Pour le prouver, prolongez le côté DE jusqu'à la rencontre de AC en G. Les angles DEF, DGC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AC, EF, coupées par la sécante DG (p. 16, r. 3°); les angles DGC, BAC, sont égaux, comme correspondants par rapport aux parallèles AB, DG, coupées par la sécante AC; donc les angles DEF, BAC, égaux à un même angle DGC, sont égaux entre eux.

S'il s'agit des angles DEF, BAH, dont les côtés DE, AB, sont parallèles de même sens, tandis que AH et EF sont parallèles de sens contraire, on prolonge AH vers C; d'après ce qu'on vient de prouver, l'angle BAC sera égal à DEF; mais BAH est le supplément de BAC, donc BAH est aussi le supplément de DEF.

Enfin, si l'on veut comparer les angles DEF, HAI, qui ont les côtés parallèles et de sens contraire, on prolongera les côtés de l'angle HAI et l'on aura BAC qui est égal à DEF d'après ce qu'on vient de prouver, et à HAI, d'après la proposition 4. Donc DEF = HAI.

Ainsi, deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux si les côtés de l'un sont tous les deux dirigés, ou dans le même sens que les côtés correspondants de l'autre, ou en sens contraire; ils sont supplémentaires si un côté de l'un est de même sens qu'un côté de l'autre, tandis que le second côté du premier est de sens contraire au second côté de l'autre.

2° Soient les angles BAC, *bac*, le côté *ab* étant supposé Fig. 17.
perpendiculaire à AB, *ac* à AC. Supposons l'angle BAC aigu, et au point A élevons au-dessus de AC, les droites AC', AB', respectivement perpendiculaires à AC, AB. Les droites AC', *ac*, étant perpendiculaires à AC, sont parallèles (p. 11 et d. 16); de même AB' est parallèle à *ab*; donc des deux angles en *a* l'un est égal à B'AC', l'autre est le supplément de B'AC'. Mais l'angle B'AC' = B'AC—C'AC et BAC = B'AC — B'AB; or, les angles B'AB, CAC' sont droits; donc BAC = B'AC'. Donc aussi, des deux angles *bac'*, *bac*, l'un est égal à BAC, l'autre en est le supplément. Si l'angle BAC n'est pas aigu, on prolonge CA vers la gauche et l'on raisonne comme on vient de le faire.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux droites AB, CD, *parallèles à une troisième* EF Fig. 18.
sont parallèles entre elles.

Menez une droite quelconque GH perpendiculaire à EF, puisque AB est parallèle à EF, la droite GH sera aussi perpendiculaire à AB (p. 14, c.). De même CD étant parallèle à EF, GH sera perpendiculaire à CD; donc les droites AB, CD, sont perpendiculaires à une même droite GH, et par conséquent elles sont parallèles (p. 11 et d. 16).

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Les parallèles AB, CD, *comprises entre des parallèles* AD, BC, *sont égales.*

Fig. 19. Tirez AC; les deux triangles ABC, ADC auront un côté commun AC; les angles BAC, ACD sont égaux comme alternes internes par rapport aux parallèles AB, CD, coupées par la sécante AC (p. 16, r. 1°); les angles BCA, CAD sont aussi égaux comme alternes internes par rapport aux parallèles AD, BC, coupées par la même sécante AC. Donc les triangles ABC, ADC ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et sont égaux (p. 6); ainsi les côtés AB, CD, opposés à des angles égaux, sont égaux. De même AD = BC.

Fig. 20. *Corollaire.* Si AD était perpendiculaire à DC, il le serait aussi à AB (p. 14, c.); BC qui est parallèle à AD, serait aussi perpendiculaire à DC et à AB. Les droites AD, BC, mesurent dans ce cas la distance des parallèles AB, CD, et comme AD = BC, il en résulte que *deux parallèles sont partout également distantes.*

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Dans tout triangle la somme des angles est égale à deux angles droits.

Fig. 21. Prolongez BA vers E, et du point A menez AD parallèle à BC. Les angles B et EAD sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BC, AD, coupées par la sécante EB; les angles C et CAD sont égaux comme alternes

internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par AC; donc B + C = EAD + DAC, et si l'on ajoute de part et d'autre l'angle BAC, on a la somme des trois angles du triangle, B + C + BAC, égale à la somme des trois angles consécutifs EAD + DAC + CAB, laquelle vaut deux angles droits (p. 2, r.).

Corollaire 1. Deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont aussi le troisième angle égal de part et d'autre.

Corollaire 2. Si dans un triangle l'un des angles est droit, les deux autres valent ensemble un angle droit, et l'un quelconque des deux est dit *complément* de l'autre.

Remarque. On a prouvé ci-dessus que B + C = EAD + DAC ou = EAC. Ainsi, *dans tout triangle, l'angle extérieur* EAC *est égal à la somme des deux intérieurs opposés* B et C.

Définition xvii. Tout triangle ABC dans lequel il y a un angle droit B se nomme triangle *rectangle;* le côté AC opposé à l'angle droit est appelé *hypothénuse.* Fig. 6.

Définition xviii. Toute portion de plan terminée de toutes parts par des lignes droites s'appelle un *polygone.* Le plus simple des polygones est le triangle. Le polygone de 4 côtés se nomme *quadrilatère;* celui de 5 côtés, *pentagone;* celui de 6 côtés, *hexagone;* celui de 7 côtés, *eptagone;* de 8 côtés, *octogone;* de 10, *décagone;* de 12, *dodécagone;* de 15, *pentédécagone;* etc. Fig. 22 à 27.

Définition xix. Un polygone est dit *convexe* si le prolongement d'aucun côté ne vient couper le contour de ce polygone. Fig. 22.

Un polygone est appelé *non convexe* si les prolongements de certains côtés, tels que CD, DE, coupent le contour du polygone. Fig. 23.

Remarque. Tout polygone non convexe peut se décomposer en polygones convexes. Car si l'on considère un côté dont le prolonge-

ment coupe le contour de la figure et qu'on prolonge ce côté en effet jusqu'à son premier point de rencontre avec le contour, le polygone sera décomposé en deux autres qui auront chacun moins de côtés que la figure proposée. Opérant de même sur chacun de ces nouveaux polygones, s'il y a lieu, on décomposera le polygone proposé en d'autres qui auront de moins en moins de côtés. Donc on arrivera finalement, ou bien à des polygones convexes de plus de trois côtés, ou à des triangles, c'est-à-dire toujours à des polygones convexes.

Fig. 24 à 26. *Définition* xx. On appelle *diagonale* toute droite telle que AC ou BD qui joint les sommets de deux angles non adjacents dans un polygone.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

La somme des angles intérieurs d'un polygone est égale à deux angles droits multipliés par le nombre des côtés, moins 4 droits.

Fig. 22 et 23. Soit un polygone ABCDEF; d'un point O pris dans l'intérieur tirez des droites aux sommets de tous les angles, de manière que le polygone soit décomposé en autant de triangles AOB, BOC, etc., qu'il a de côtés; dans chacun de ces triangles la somme des angles est égale à 2 angles droits (p. 20); ainsi la somme des angles de tous ces triangles est égale à 2 angles droits multipliés par le nombre des côtés du polygone, et pour avoir la somme des angles du polygone, il suffit de retrancher de ce produit la somme des angles en O, laquelle vaut 4 angles droits. Donc multipliez 2 angles droits par le nombre des côtés du polygone, et retranchez de là 4 angles droits, le reste sera la somme des angles intérieurs du polygone.

Corollaire. Dans un quadrilatère la somme des angles sera donc $2^d \times 4 - 4^d$ ou 4 droits; dans un pentagone $2^d \times 5 - 4^d = 6$ droits; dans un hexagone $2^d \times 6 - 4^d =$

8 droits; et en général dans un polygone de n côtés, cette somme est $2^d \times n - 4^d$ ou $2^d(n-2)$.

Définition xxi. Le quadrilatère qui a les côtés opposés parallèles se nomme un *parallélogramme*. Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux (p. 19), c'est-à-dire AB = CD, AD = BC. Les angles opposés sont aussi égaux (p. 17). Fig. 24 à 27.

Parmi les parallélogrammes on distingue:

Définition xxii. Le *rectangle,* dans lequel les côtés opposés AD, BC, sont perpendiculaires aux deux autres AB, CD, de sorte que les 4 angles sont droits. Fig. 24.

Définition xxiii. Le *carré,* dans lequel la même propriété a lieu, et où en outre les côtés adjacents AD, AB, sont égaux; de sorte que dans cette figure les 4 angles sont droits et les 4 côtés égaux. Fig. 25.

Définition xxiv. Le *lozange* est un parallélogramme dont les côtés adjacents, et par conséquent les 4 côtés, sont égaux, sans que les angles soient droits. Fig. 27.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Un quadrilatère est un parallélogramme: 1° *si les côtés opposés sont égaux;* 2° *si deux côtés opposés sont égaux et parallèles.*

1° Soit AB = CD, AD = BC; je dis que la figure ABCD est un parallélogramme. En effet, tirez la diagonale AC; les triangles ABC, ADC, auront le côté AC commun, le côté AB = CD le côté AD = BC, par hypothèse; donc (p. 8), ils sont égaux, et les angles ACD, BAC, opposés aux côtés égaux AD, BC, sont égaux. Mais ces angles ont par rapport aux droites AB, CD et AC, la position d'alternes internes. Donc les droites AB, CD, sont parallèles (p. 15, Fig. 19.

r. 1°). On prouve de même que AD est parallèle à BC; donc ABCD est un parallélogramme (d. 20).

2° Supposons AB égal et parallèle à CD, et tirons AC. A cause des parallèles AB, CD, coupées par AC, les angles BAC, ACD, sont égaux comme alternes internes. Donc les deux triangles BAC, DAC, ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir AC commun, AB = DC par hypothèse; ainsi ils sont égaux (p. 6), et l'angle DAC = ACB. De là on conclut (p. 15, r. 1°), que AD et BC sont parallèles, et que la figure ABCD est un parallélogramme (d. 20).

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Fig. 24 à 27. *Dans tout parallélogramme, les diagonales* AC, BD *se coupent mutuellement en deux parties égales et réciproquement.*

Car la droite AB étant parallèle à DC, l'angle ABO = ODC (p. 16, 2°), et l'angle BAO = OCD; de plus, le côté AB = DC (p. 19). Donc ces deux triangles AOB, DOC sont égaux (p. 6), et les côtés AO, OC, opposés de part et d'autre à des angles égaux, sont égaux. De même DO = BO.

Réciproquement si AO = OC et BO = OD, les triangles AOB, DOC seront égaux comme ayant l'angle AOB = DOC (p. 4) compris entre côtés égaux (p. 5); donc les angles BAC, ACD, opposés à des côtés égaux, sont égaux et (p. 15. r. 1°) les droites AB, DC sont parallèles; de même, AD, BC sont parallèles, et la figure ABDC est un parallélogramme (d. 20).

Fig. 24. *Remarque.* 1° Dans le rectangle les deux diagonales sont égales.

Fig. 27. 2° Dans le lozange les diagonales se coupent à angles

droits. Car, comme le point B est également distant de A et C, de même que le point D, ces deux points sont sur la perpendiculaire élevée au milieu de AC (p. 13); donc BD est cette perpendiculaire.

3° Dans le carré, qui est à la fois un rectangle et un lozange, les diagonales sont égales, se coupent à angles droits et en parties égales. Fig. 25.

LIVRE II.

LA LIGNE DROITE ET LE CERCLE.

Fig. 28. *Définition i. La circonférence du cercle* est une ligne courbe dont tous les points E, H, A, etc., sont également distants d'un point C situé dans le plan de cette ligne, et appelé *centre.*

Définition ii. Toute droite CE, CF, etc., menée du centre à un point de la circonférence, se nomme *rayon.* Dans un même cercle tous les rayons sont égaux.

Définition iii. Toute droite AB, passant au centre et terminée de part et d'autre à la circonférence, se nomme un *diamètre.* Le diamètre est double du rayon.

Définition iv. Un *arc* est une partie de la circonférence, telle que BF, EF, etc. La droite EF qui joint les extrémités d'un arc, s'appelle la *corde* ou *sous-tendante* de l'arc.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Une ligne droite ne saurait rencontrer une circonférence en plus de deux points.

Car si une droite pouvait rencontrer une circonférence en trois points E, H, F, les trois rayons CE, CH, CF seraient trois lignes égales menées d'un même point C sur cette droite; ce qui est impossible (l. 1, p. 12, c. 3). Fig. 28.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Le diamètre est la plus grande corde et divise la circonférence en deux parties égales.

Car 1° soit une corde EF qui ne passe pas au centre; tirez les rayons CE, CF; on a EF < EC + CF ou < BC + CA ou < BA. Fig. 28.

2° Si l'on fait tourner la partie ABH' du plan autour du diamètre AB, tout point H' de l'arc AH'B viendra coïncider avec un certain point de AHB. Car si l'on tire CH', qu'on prenne l'angle ACH = ACH', la ligne CH' tombera sur CH, et comme CH' est égal à CH, le point H' tombera en H. Donc l'arc AH'B coïncidera avec AHB; donc AHB = AH'B.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Le diamètre DD'*, perpendiculaire à une corde* BC*, divise cette corde et les arcs sous-tendus* BDC, BD'C*, chacun en deux parties égales.* Fig. 29.

Superposez la demi-circonférence DCD' avec DBD', le point C devra tomber quelque part sur l'arc DBD'; mais l'angle droit DEC coïncidant avec DEB, le point C doit aussi tomber sur la droite EB; donc il tombera sur le point B. Ainsi la droite EC = EB, et l'arc DC, qui coïncide avec DB, est égal à DB; de même D'B = D'C; donc le point E est le

milieu de la corde et les points D, D′ sont les milieux des arcs.

Corollaire. Le centre A, le milieu E de la corde et les milieux D, D′ des deux arcs sous-tendus BDC, BD′C sont donc quatre points en ligne droite, de sorte que toute droite qui passera par deux de ces points, passera aussi par les deux autres, et sera perpendiculaire à la corde; de plus, toute perpendiculaire abaissée d'un de ces quatre points, sur la corde, passera par les trois autres.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Fig. 30. *Si dans un même demi-cercle ou dans des demi-cercles égaux deux arcs* BGC, EHF *sont égaux: 1° les angles au centre* BAC, EDF, *qui interceptent ces arcs, sont égaux; 2° les cordes* BC, EF *de ces arcs sont égales; 3° ces cordes égales seront également éloignées du centre.*

Menez les rayons AG, DH, respectivement perpendiculaires aux cordes BC, EF; ils passeront aux points I, L, milieux de ces cordes (p. 3). Placez ensuite le point D en A, le point E en B; les deux circonférences coïncideront, et comme l'arc EF est égal à BC, le point F tombera en C et le point H, milieu de l'arc EHF (p. 3), coïncidera avec G, milieu de BGC. Donc, 1° l'angle EDF coïncidera avec BAC et lui sera égal; 2° la corde EF coïncidera avec BC et lui sera égale. Enfin, le point L, milieu de EF, coïncidera avec I, milieu de BC, et la perpendiculaire DL sera égale à AI. Donc, 3° les cordes égales BC, EF sont également éloignées du centre.

Remarque. Cette proposition offre trois réciproques. Par exemple, si l'on suppose les cordes BC, EF égales, les rayons BA, DE restant égaux, on conclura, par la superposition

des deux triangles ABC, DEF, qui auront les côtés égaux deux à deux, que l'arc BGC=EHF et l'angle BAC=EDF. Si, au contraire, on suppose l'angle BAC=EDF, les triangles ABC, EDF auront un angle égal entre côtés égaux, pourront se superposer, et l'arc BGC coïncidera encore avec EHF.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Si dans un même demi-cercle ou dans des demi-cercles égaux, on prend deux cordes inégales KM, EF, 1° *la plus grande corde* KM *soustendra le plus grand arc;* 2° *cette plus grande corde sera la moins éloignée du centre.* Fig. 30.

1° Car dans les deux triangles KAM, EDF, les côtés AK, AM sont égaux à DE, DF; le côté KM est plus grand que EF; donc (l 1, p. 7, c.) l'angle KAM sera plus grand que EDF. Cela fait, posons le point D sur A, le rayon DH sur AG, l'angle EDF se placera dans l'angle KAM, et par conséquent l'arc BGC qu'il interceptera sera < KGM.

2° La corde EF coïncidant avec BC, cette droite BC sera aussi perpendiculaire à AG; or, évidemment AI > AO; donc DL, qui est égal à AI, sera plus grand que AO. Donc KM est moins éloignée du centre que EF.

Remarque. Si l'on suppose l'arc KGM plus grand que l'arc EHF, on pourra conclure que la corde KM est > EF. En effet, soient G, H, les milieux des arcs; prenez GB = GC = EH, l'arc BGC sera égal à EHF, et l'angle BAC sera égal à EDF (p. 4); or, l'angle BAC est moindre que KAM; donc l'angle EDF est aussi < KAM, et les deux triangles KAM, EDF ayant d'ailleurs les côtés KA, MA égaux à ED, DF, il s'ensuit (l. 1, p. 7) que le côté EF est < KM.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Fig. 31. *Pour qu'une droite* BC *n'ait qu'un seul point* D *de commun avec une circonférence, il suffit et il faut qu'elle soit perpendiculaire au rayon* AD *mené à ce point.*

Supposons la droite BC perpendiculaire en D au rayon AD; tout autre point E, pris sur cette droite, sera hors du cercle, puisque la droite AE, qui est une oblique, est plus longue que la perpendiculaire AD (l. 1, p. 12, 1°).

En second lieu, pour que BC n'ait que le point D de commun avec la circonférence, il faut que tous les autres points de BC soient plus éloignés du centre A que le point D; il faut donc que AD soit la plus courte distance du point A à la droite BC, c'est-à-dire que AD soit perpendiculaire à BC (l. 1, p. 12, r.).

Fig. 31. *Définition v.* Une droite qui n'a qu'un point de commun avec une circonference, se nomme une *tangente;* le point commun est appelé *point de contact.*

Remarque. Puisque toute autre droite, menée par le point D, coupe la circonférence, il s'ensuit que par le point D on ne saurait mener une droite qui, aux environs de ce point, passe entre la circonférence et la tangente.

Fig. 31. *Définition vi.* Une droite qui rencontre la circonférence en deux points se nomme une *sécante;* telle est FG.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.

Il y a trois cas : 1° Les deux parallèles sont des sécantes AB, CD. Du centre O menez OI perpendiculaire à AB; il le sera aussi à sa parallèle CD (l. 1, p. 14, c.). Mais ce rayon OI étant perpendiculaire à chacune des cordes NP, LM, le point I sera le milieu de chacun des arcs NIP, LIM (p. 3), de sorte que NI = IP, LI = IM; donc NI — LI = IP — IM ou NL = PM. Fig. 32.

2° L'une des parallèles est une sécante AB, l'autre une tangente EF. Menez le rayon OI au point de contact; il sera perpendiculaire à la tangente EF (p. 6), et par conséquent aussi à sa parallèle AB; donc ce point I est le milieu de l'arc LIM (p. 3), et l'on a LI = IM.

3° Les deux parallèles sont des tangentes EF, GH; menez la sécante AB parallèle à ces droites. D'après ce qu'on vient de prouver, on a LI = IM, LK = MK; donc LI + LK = MI + MK, ou ILK = IMK, et chacun de ces arcs est une demi-circonférence.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Deux circonférences de cercle ne sauraient avoir plus de deux points communs sans se confondre.

Soit une circonférence ayant son centre en A, et soient pris sur cette circonférence trois points quelconques B, C, D; je dis que toute circonférence qui passera par ces trois points se confondra avec la circonférence donnée. En effet, tirons les cordes BC, CD; aux points E, F, milieux de ces cordes, élevons des perpendiculaires EA, FA qui passeront au centre A (p. 3). Toute circonférence qui passera par les deux points B, C, devra avoir son centre également distant de ces deux points (d. 1); donc il se trouvera sur la droite AE (l. 1, p. 13); par la même raison toute cir- Fig. 33.

conférence qui passera par les deux points C, D, aura son centre sur AF; donc, toute circonférence qui passera par les trois points B, C, D, aura son centre à la fois sur EA et sur FA, c'est-à-dire au point A, et comme elle passe au point B, elle a pour rayon AB et se confond avec la circonférence donnée.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Fig. 34. *Toutes les fois que deux circonférences se coupent en deux points* C, C', *la ligne des centres* AB *est perpendiculaire au milieu de la corde commune* CC'.

Car si au milieu de la corde CC on élève une perpendiculaire, elle doit passer par le centre de chacun des deux cercles (p. 3, r.); donc cette perpendiculaire se confond avec la droite AB.

Corollaire. Lorsque deux circonférences se coupent en deux points, l'un de ces points est d'un côté de la ligne des centres, l'autre est de l'autre côté, et aucun de ces deux points ne saurait être sur cette ligne.

Remarque. Si deux cercles n'ont qu'un point commun, ce point est sur la ligne des centres. Car s'il était d'un côté de cette ligne, comme cette même ligne divise la figure en deux parties superposables, il s'ensuit qu'il y aurait encore un point commun de l'autre côté de cette ligne; il y aurait donc deux points communs, tandis qu'on n'en suppose qu'un seul.

Définition VII. Deux cercles sont dits *tangents* lorsqu'ils n'ont qu'un point de commun : ce point commun s'appelle *point de contact*.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Pour que deux cercles aient un seul point commun, il faut et il suffit que la distance des centres soit égale à la somme ou à la différence des rayons.

1° Supposons la distance des centres AB égale à la somme des rayons AC, CB. Les deux cercles décrits des points A et B comme centres avec ces rayons respectifs, passeront tous les deux au point C; ils auront donc le point C de commun, et n'en auront pas d'autre. Car s'ils avaient deux points communs, aucun des deux ne serait sur la ligne des centres (p. 9, c.). Les deux cercles se *touchent* donc *extérieurement.* Fig. 35.

Réciproquement si deux cercles se touchent extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons. Car le point commun est nécessairement sur la ligne des centres (p. 9, r.) entre les deux centres A, B, de sorte que AB = AC + BC.

2° Soit la distance des centres AB égale à la différence des rayons AC, BC. Les deux cercles auront le point C commun; on prouvera, comme dans le cas précédent, que c'est le seul point commun et que réciproquement si deux cercles se touchent intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons. Fig. 36.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Si deux cercles se coupent en deux points, la distance des centres est moindre que la somme des rayons, et plus grande

que leur différence ; si deux cercles n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, ou plus petite que leur différence.

Fig. 34. 1° Si deux cercles se coupent en deux points, aucun de ces points n'est sur la ligne des centres (p. 9, c.). Donc chacun de ces points détermine avec les centres A et B un triangle comme ACB, dans lequel chaque côté est plus petit que la somme des deux autres. Ainsi $AB < AC + BC$, et $BC < AB + AC$, ou, retranchant AC de part et d'autre, $BC - AC < AB$ ou $AB > BC - AC$.

2° Si deux cercles n'ont aucun point commun, ils sont extérieurs l'un à l'autre comme à la figure 37, ou bien l'un est dans l'autre comme figure 38. Dans le premier cas on a évidemment $AB > AC + DB$; dans le second $AB + DC = AC - BD$, et par conséquent $AB < AC - BD$.

Remarque. Réciproquement si la distance des centres est plus petite que la somme et plus grande que la différence des rayons, les deux cercles se couperont en deux points. Car s'ils n'avaient qu'un point commun, la distance des centres serait égale à la somme ou à la différence des rayons (p. 10), et s'ils n'avaient aucun point commun, on vient de voir que la distance des centres serait plus grande que la somme, ou plus petite que la différence des rayons.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

Sur le milieu d'une droite AB *élever une perpendiculaire.*

Fig. 39. Du point A comme centre avec un rayon AG plus grand que la moitié de AB décrivez une circonférence CGD; du point B comme centre avec le même rayon décrivez un second cercle CHD. Ces deux cercles se couperont en deux points; car chaque rayon étant plus grand que la moitié de

AB, la somme des rayons sera plus grande que la distance des centres AB; d'ailleurs les deux rayons étant égaux, leur différence, qui est nulle, est moindre que la même distance AB. Donc (p. 11) les cercles se couperont en deux points C, D; mais à cause des rayons égaux, chacun de ces points est également distant des points A et B; donc C et D appartiennent à la perpendiculaire élevée au milieu de AB (l. 1, p. 13). Donc enfin CD est cette perpendiculaire.

Remarque. Cette construction sert à diviser une ligne en deux parties égales; si l'on divise ensuite chaque moitié en deux parties égales et ainsi de suite, on pourra diviser la ligne en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

Par trois points donnés A, B, C, *non en ligne droite faire passer une circonférence de cercle.* Fig. 40.

Joignez AB, BC; aux milieux de ces droites élevez les perpendiculaires EF, DH; je dis que ces deux perpendiculaires se couperont. Car si elles ne se coupaient pas, elles seraient parallèles; or, AB qui est perpendiculaire à EF, le serait aussi à sa parallèle DH (l. 1, p. 14, c.); mais BC est déjà perpendiculaire à DH, et comme les trois points A, B, C ne sont pas en ligne droite, BC est différent du prolongement de AB; donc du même point B on pourrait mener deux perpendiculaires sur la même droite DH, ce qui est absurde (l. 1, p. 11). Ainsi les droites EF, DH se couperont en un point O. Or, ce point, appartenant à EF qui est perpendiculaire au milieu de AB, est également distant des points A et B (l. 1, p. 13); par une raison semblable le point O est également distant des points B, C; donc les trois distances

OA, OB, OC sont égales, et le cercle décrit du point O avec le rayon OA, passera par les trois points A, B, C.

Remarque. La même construction sert à faire passer un cercle par les trois sommets d'un triangle ABC, ce que l'on appelle *circonscrire* un cercle à un triangle. Elle sert encore à trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné. Dans ce cas on prend sur cet arc ou sur la circonférence trois points à volonté A, B, C; on les joint par des cordes AB, BC, sur les milieux desquelles on élève les perpendiculaires EF, HD qui passeront toutes les deux au centre (p. 3, c.) et détermineront ce point par leur intersection O.

PROPOSITION XIV.

PROBLÈME.

Fig. 41. *Par un point* C *pris sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Prenez sur la droite AB les deux distances égales CE, CD; des points E, D comme centres avec un même rayon, plus grand que DC, décrivez deux arcs qui se coupent en un point F; ce point F sera également distant de D et E; il en est de même du point C; donc CF sera perpendiculaire à DE (l. 1, p. 13).

PROPOSITION XV.

PROBLÈME.

Fig. 42. *D'un point* A *donné hors d'une droite* DE *mener une perpendiculaire à cette droite.*

Du point A comme centre et d'un rayon suffisamment grand décrivez un arc qui coupe la droite DE en deux points B et C; de ces deux points comme centres avec un même

rayon, plus grand que la moitié de BC, décrivez deux arcs qui se coupent en un point F; les deux points A et F étant également distants de C et B, la droite AF sera perpendiculaire à BC ou DE.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

Construire un triangle connaissant les trois côtés A, B, C. Fig. 43.

Pour que le triangle soit possible, il faut que le plus grand des trois côtés soit moindre que la somme des deux autres; car dans tout triangle cette propriété a lieu. Si cette condition est remplie le triangle peut se construire. En effet, prenez une ligne DE égale au plus grand des trois côtés, c'est-à-dire à A; du point D comme centre avec un rayon égal à B, décrivez un cercle; du point E comme centre avec un rayon égal à C, décrivez un second cercle. Ces deux cercles se couperont; car la distance des centres DE est supposée plus petite que la somme B + C des rayons; de plus, puisque DE est plus grand que chacun des rayons, il est aussi plus grand que leur différence. Donc les cercles se couperont (p. 11) en deux points; soit F l'un de ces points; DEF sera le triangle demandé.

Le triangle serait encore possible si A était égal au plus grand des deux autres côtés B, C, ou si les trois côtés étaient égaux.

Définition VIII. Un triangle qui a les trois côtés inégaux est appelé *triangle scalène.*

Définition IX. Un triangle qui a les trois côtés égaux se nomme *triangle équilatéral.* Il a été prouvé (l. 1, p. 5, c.) que si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles opposés le sont. Donc dans un triangle équilatéral les trois

angles sont égaux entre eux et à $\frac{2}{3}$ d'angle droit (l. 1, p. 20). Réciproquement si les trois angles d'un triangle sont égaux, les trois côtés le seront (l. 1, p. 6, c).

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

Fig. 44. *Construire un triangle connaissant deux côtés* A, B, *et l'angle compris* C.

Tirez une ligne indéfinie GH et faites au point G un angle égal à l'angle C. A cet effet, du point C comme centre avec un rayon arbitraire CD, décrivez un arc DFE terminé aux côtés de l'angle, et tirez la corde DE. Du point G comme centre avec un rayon GI égal à CD, décrivez un arc indéfini, et du point I avec un rayon égal à la corde DE, décrivez un nouvel arc qui coupe le premier en un point K; si l'on tire KI, cette corde sera égale à DE, et comme de plus le rayon GI est égal à CD, l'arc ILK sera égal à DFE, et l'angle G à C (p. 4, r.).

Actuellement, on prendra GH égal à A, GM égal à B, on tirera MH, et GMH sera le triangle demandé (l. 1, p. 5).

PROPOSITION XVIII.

PROBLÈME.

Fig. 45. *Construire un triangle connaissant un côté et deux angles.*

Premier cas. Les deux angles B, C doivent être adjacents au côté donné: prenez une ligne DE égale à A; au point D faites l'angle D égal à C, au point E l'angle FED égal à B; les côtés DF, EF se couperont si la somme B + C est plus petite que deux droits, et DFE sera le triangle demandé.

Deuxième cas. L'angle C doit être adjacent au côté A, et l'angle B opposé : sur une ligne GH égale à A faites l'angle G égal à C; en un point quelconque I de la ligne GI faites l'angle GIL égal à B, et du point H menez HM parallèle à LI (l. 1, p. 15), GHM sera le triangle demandé ; car à cause des parallèles l'angle GMH opposé au côté GH est égal à GIL ou à B ; ce côté GH est d'ailleurs égal à A et l'angle G est égal à C.

PROPOSITION XIX.

PROBLÈME.

Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Fig. 46.

Il y a deux cas : 1° L'angle donné C est opposé au côté A qui est le plus grand des deux côtés donnés. Faites un angle FDE égal à l'angle donné C ; sur l'un des côtés prenez DE égal au côté B, et du point E comme centre avec le rayon A, décrivez un cercle. Puisque ED ou B est moindre que le rayon A, la droite DF aura le point D dans ce cercle et le coupera en deux points F, G situés de différents côtés du point D. Si donc on tire EF, EG, on aura les deux triangles EDG, EDF, dont le dernier seul satisfait à la question. Car l'angle EDF est l'angle donné, et les côtés DE, EF sont égaux aux côtés donnés B et A. Le triangle GED renferme le côté DE égal à B, et le côté GE égal à A; mais l'angle GDE, opposé à ce côté, est le supplément de l'angle C. Cependant si l'angle C était droit, le triangle GDE serait égal à EDF.

2° L'angle donné C doit être opposé au plus petit des deux côtés donnés, c'est-à-dire à B. Après avoir fait l'angle K égal à C, on prend KI égal à A, et du point I comme centre avec un rayon égal à B, on décrit un cercle; or, abaissons de I la perpendiculaire IM sur KM. Si B est plus grand que IM, le point M sera dans le cercle, la droite KM sera

une sécante qui coupera ce cercle en deux points, et comme KI ou A est plus grand que le rayon B, ces deux points L, P seront situés du même côté du point K. Tirant donc IL et IP, on aura deux triangles KIL, KIP, satisfaisant tous les deux à la question. Car dans le premier, KI = A, IL = B et l'angle K, opposé à IL, est égal à C; dans le second, KI = A, IP = B, et l'angle K, opposé à IL, est égal à C.

Si le côté B était égal à IM, l'arc de cercle décrit du centre I et du rayon B toucherait la droite KP en M, et le triangle KMI seul résoudrait la question. Enfin, si B était plus petit que IM, l'arc de cercle ne rencontrerait pas KP, et le triangle serait impossible.

Corollaire. Puisqu'il n'y a qu'un seul triangle qui réponde à la question lorsqu'on donne deux côtés et l'angle opposé au plus grand de ces côtés, on peut conclure que *deux triangles sont égaux* s'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand côté aussi égal.

PROPOSITION XX.

PROBLÈME.

Fig. 47. *Diviser un angle ou un arc en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales.*

S'il s'agit d'un angle BAC on décrit du sommet A comme centre avec un rayon quelconque AB, un arc BIC terminé aux côtés de l'angle. Ensuite des points B et C comme centres avec un même rayon plus grand que la moitié de la corde BC, on décrit deux arcs qui se coupent en un point F; la droite AF divisera l'angle BAC en deux parties égales. Car la droite AF, ayant deux points A et F également distants de B et C, se trouve perpendiculaire au milieu de BC (p. 15); donc elle passe au milieu de l'arc BIC (p. 3); mais si les arcs BI, IC sont égaux, les angles BAI, IAC le sont aussi (p. 4).

En second lieu, s'il s'agit d'un arc BC à diviser en deux

parties égales, on détermine le point F comme tout à l'heure, on tire AF et l'on a le point I, milieu de l'arc.

Enfin, si l'on divise chaque moitié de l'angle ou de l'arc en deux parties égales, et ainsi de suite, on pourra opérer la division en 4, 8, 16, etc., parties égales.

Remarque. La partie AF de la ligne de division est le lieu de tous les points qui, dans l'angle BAC, sont également distants des côtés. En effet, soit le point G pris sur AF; menons de ce point sur les côtés de l'angle les perpendiculaires GH, GH'; les triangles AGH, AGH', auront l'angle droit AHG égal à AH'G; les angles HAG, H'AG, sont égaux comme moitiés d'un même angle; donc aussi les angles AGH, AGH', sont égaux (l. 1, p. 20, c. 1); d'ailleurs le côté AG est commun; donc (l. 1, p. 6) ces deux triangles sont égaux entre eux, et le côté GH est égal à GH'. S'il s'agit d'un point K pris dans l'angle, mais hors de la droite AF, on abaisse de ce point les perpendiculaires KH, KL, sur les deux côtés; l'une de ces perpendiculaires, KH, coupe la droite AF en un point G; de ce point G on abaisse GH' perpendiculaire sur AC, et l'on joint KH'; cela fait, on aura KL plus petit que l'oblique KH'; mais KH' < KG + GH', ou, puisque GH' = GH, KH' < KG + GH ou < KH; donc aussi KL < KH. Ainsi, tout point pris sur AF est également distant des côtés de l'angle BAC, et tout point pris dans l'angle et hors de AF est inégalement distant de ces mêmes côtés.

Définition x. La droite qui divise un angle en deux parties égales est appelée la *bissectrice* de cet angle.

PROPOSITION XXI.

PROBLÈME.

Mener un cercle tangent à trois droites AB, CD, EF, *qui se coupent deux à deux.* Fig. 48

Ce problème offre 4 solutions :

1° Tirez les bissectrices GL, HN, des angles BGF, AHD; elles se couperont en un point K. Or, ce point, situé dans l'angle BGF, et sur la bissectrice de cet angle, est à égales distances des côtés AB, EF; par une raison semblable il est également distant des côtés AB, CD; donc les perpendiculaires KO, KO', KO'', abaissées de ce point sur ces trois droites sont égales, et le cercle décrit du point K comme centre avec le rayon KO, passera par les points O, O', O'', et sera tangent aux trois droites AB, CD, EF, puisque celles-ci

sont perpendiculaires aux extrémités des rayons KO, KO′, KO″ (p. 6).

Puisque le point K est également distant des droites CD, EF, il est aussi sur la bissectrice de l'angle CIE (p. 20, r.), de sorte que les bissectrices des angles du triangle GHI se coupent en un même point K.

2° Les bissectrices des trois angles BHD, BGF, CIF, se coupent de même en un point L qui est le centre d'un cercle tangent aux trois portions de droites HB, HI, IF. Le rayon sera la perpendiculaire abaissée de L sur une de ces droites.

3° Les bissectrices des trois angles AHC, CIE, BGE, se coupent en un point M, centre d'un cercle tangent aux droites CH, HG, GE. Le rayon est la perpendiculaire abaissée de M sur une de ces droites.

4° Enfin, les bissectrices des angles AGI, AHD, DIG, se coupent en un point N, centre d'un cercle tangent aux trois droites AG, GI, ID. Le rayon est la perpendiculaire abaissée de N sur une de ces droites.

Remarque. Si l'on prolonge LH, bissectrice de l'angle BHI, les angles que ce prolongement fera avec CH, HG, seront respectivement égaux à LHI, LHB, et seront par conséquent égaux entre eux. Ce prolongement se confondra donc avec HM, bissectrice de CHA.

De plus, les deux bissectrices ML, HN, sont perpendiculaires entre elles. Car l'angle AHN est la moitié de AHD, l'angle AHM est la moitié de AHC; donc AHN + AHM ou NHM est la moitié de la somme des deux angles supplémentaires AHD, AHC; donc NHM est droit.

Des propriétés analogues ont lieu en G et I.

Fig. 49 et 50. *Définition XI.* On entend par angle *inscrit* tout angle tel que BCD, formé par deux cordes.

Définition XII. On entend par *segment de cercle* l'espace compris entre un arc et sa corde.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

L'angle inscrit, ainsi que l'angle formé par une tangente et une corde, est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc compris entre les côtés du premier.

Fig. 49. Soit d'abord l'angle inscrit BCE dont l'un des côtés est

un diamètre. Menez le diamètre FG parallèle à BC ; l'angle au centre FAE sera égal à BCE, à cause des parallèles BC, FG coupées par CE (l. 1, p. 16, 3°). Or, les angles CAG, FAE étant égaux, les arcs FE, CG le sont (p. 4). D'un autre côté les arcs CG, BF sont aussi égaux (p. 7.). Donc l'arc FE = BF, et l'arc FE, intercepté par l'angle au centre FAE, est la moitié de l'arc BFE intercepté par l'angle inscrit BCE, égal à FAE.

Cela posé, s'il s'agit d'un angle inscrit tel que BCD, on tirera le diamètre CE; les angles BCE, ECD seront, d'après ce qui vient d'être prouvé, respectivement égaux aux angles au centre qui intercepteraient les moitiés des arcs BE, ED. Donc BCE + ECD sera égal à l'angle au centre qui intercepterait la moitié de BE + ED ou de BED.

Si le diamètre CE passe hors de l'angle BCD, l'angle BCE Fig. 50.
sera égal à l'angle au centre qui comprend la moitié de l'arc BDE, et DCE à celui qui comprendrait la moitié de DE; donc l'angle BCD, c'est-à-dire BCE — DCE, sera égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de BDE — DE ou de BD.

En second lieu, soit l'angle BDC formé par une tangente Fig. 51.
DC et une corde BD. Menons le diamètre DE qui sera perpendiculaire à la tangente (p. 6). Or, si l'on tire deux diamètres perpendiculaires ED, FH, les 4 angles autour de A étant égaux, les 4 arcs DF, FE, EH, HD le seront. Donc l'angle droit EDC est égal à l'angle au centre qui intercepte le quart de circonférence, c'est-à-dire la moitié de l'arc EFD. On vient d'ailleurs de prouver que l'angle BDE est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de BE; donc l'angle BDC est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc BFD.

Corollaire 1. *Les angles* B, B , etc., *inscrits dans le même* Fig. 52.
segment ABC, *sont égaux entre eux,* comme étant égaux à l'angle au centre qui intercepte la moitié de l'arc ADC.

Fig. 53. *Corollaire* 2. *Tout angle* BAC, *inscrit dans un demi-cercle, est droit.* Car il est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié d'une demi-circonférence ou un quart de circonférence, et l'on vient de voir que cet angle au centre est droit.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÈME.

D'un point donné mener une tangente à un cercle donné.

Fig. 31. Si le point donné est sur la circonférence en D, on tire le rayon DA, et au point D on lui mène la perpendiculaire BC qui sera la tangente demandée (p. 6).

Fig. 54. Mais si le point donné est hors du cercle, soit A ce point, DCE le cercle. Joignez le point A au centre B de ce cercle, et sur AB comme diamètre décrivez une circonférence qui coupera la circonférence donnée en deux points D, E; tirez les droites AD, AE qui seront toutes les deux des tangentes. Car si l'on mène le rayon BD, l'angle BDA, inscrit dans le demi-cercle BDA, sera droit (p. 22, c. 2); donc AD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon BD, est une tangente (p. 6). Même raisonnement pour AE.

Remarque 1. La ligne des centres BA, étant perpendiculaire au milieu de la corde commune DE (p. 9), il s'ensuit que le point A est également distant des points D et E (l. 1, p. 13). Donc les parties AD, AE sont égales.

Fig. 55. *Remarque* 2. La tangente par un point extérieur peut encore se construire ainsi qu'il suit : Soit A le point donné, DCE le cercle donné, B son centre. De ce point B avec un rayon double du rayon BD décrivez un cercle FG; du point A décrivez un second cercle qui passe par le centre B, et qui coupera le précédent en deux points F et G; joignez ces points au centre B par les cordes BF, BG qui coupe-

tont le cercle donné en deux points D, E: les droites AD, AE seront les tangentes demandées. Car la corde BF, rayon du cercle FG, étant double de BD, le point D sera le milieu de cette corde, et la droite AD, menée par le centre du cercle FG et par ce milieu, sera perpendiculaire à la corde (p. 3), ou en d'autres termes, AD est perpendiculaire à l'extrémité D du rayon BD; donc AD est tangent au cercle DCE.



PROPOSITION XXIV.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée AB décrire un segment capable d'un angle donné, c'est-à-dire un segment tel que tout angle qui y sera inscrit soit égal à cet angle donné. Fig. 56.

Au point A de la droite AB faites l'angle BAD égal à l'angle donné C; en ce même point A élevez sur AD la perpendiculaire AO, et au point E, milieu de AB, tirez la ligne EO perpendiculaire à AB; ces deux droites AO, EO se couperont en un point O, et si de ce point O comme centre avec le rayon AO on décrit un cercle, on aura le segment cherché. En effet, puisque EO est perpendiculaire au milieu de AB, le point O est également distant de A et de B; ainsi le cercle décrit du centre O et du rayon AO passera en B. De plus, tout angle inscrit dans le segment BHA est égal à l'angle au centre qui intercepterait la moitié de l'arc BIA (p. 22); mais AD, perpendiculaire au rayon AO, est une tangente; donc l'angle BAD, formé par une tangente AD et une corde BA (p. 22), est aussi égal à ce même angle au centre; donc tout angle inscrit dans ce segment est égal à l'angle BAD, qui lui-même est égal à l'angle donné C. Donc le segment BAD est capable de l'angle donné.

LIVRE III.

RAPPORTS DES ANGLES ET DES LONGUEURS.

Une droite de longueur donnée, ou un arc de cercle, peuvent être partagés en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales; en continuant les subdivisions, on peut partager l'une et l'autre longueur en parties égales aussi petites qu'on voudra, en parties plus petites que telle ligne qu'on voudra assigner. C'est ce qu'on exprime en disant qu'on peut partager une droite de longueur donnée en parties égales *infiniment petites.*

Définition 1. Une longueur employée dans un raisonnement quelconque est dite *infiniment petite* lorsqu'au lieu de cette longueur-là on peut employer toute autre longueur quelque petite qu'elle soit par rapport aux données de la question. On entend de même par surface infiniment petite, une surface qui peut être remplacée dans le même raisonnement par toute autre, quelque petite qu'elle soit par rapport aux données.

Quelquefois il arrive que dans les constructions, certaines grandeurs sont tellement liées entre elles que si l'une d'elles est remplacée par d'autres de plus en plus petites, quelques-unes de celles qui lui sont subordonnées, se trouvent aussi remplacées par d'autres de plus en plus petites, sans que ce

décroissement ait une autre limite que zéro. Telles sont, par exemple, l'arc et sa corde; car on peut prendre dans un cercle donné un arc assez petit pour que la corde soit aussi petite qu'on voudra; c'est ce qu'on exprime en disant qu'un *arc infiniment petit* est soustendu par une *corde infiniment petite.*

En résumé donc, on entend par *infiniment petite* une grandeur qui, dans le même raisonnement, peut être remplacée par une infinité d'autres, aussi petites qu'on voudra par rapport aux données, soit que cette substitution puisse s'opérer immédiatement et à volonté, soit qu'elle puisse être conçue comme une conséquence d'autres constructions ou raisonnements. Cette définition peut elle-même être présentée sous la forme suivante : *Une grandeur est infiniment petite lorsqu'elle peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée de même nature.*

Il y a encore quelques expressions dont nous nous servirons pour donner aux raisonnements plus de concision, et que nons allons expliquer par des exemples tirés de l'arithmétique.

On sait que si aux deux termes d'une fraction telle que $\frac{5}{7}$ on ajoute un même nombre, la nouvelle fraction obtenue est plus grande que la première; si sur cette nouvelle fraction on opère de même, on en obtient une troisième plus grande que la seconde, et ainsi de suite. Cependant par cette opération seule on ne pourra jamais déduire de la fraction $\frac{5}{7}$ une nouvelle fraction supérieure ni même égale à l'unité, puisque dans toutes ces fractions le numérateur sera surpassé de deux unités par le dénominateur. On peut cependant arriver ainsi à des fractions qui diffèrent de l'unité aussi peu que l'on voudra; ainsi, en ajoutant un million aux deux termes, on a la fraction $\frac{1,000,005}{1,000,007}$ qui ne diffère de l'unité que de $\frac{2}{1,000,007}$. Pour exprimer cette propriété d'une manière concise on est convenu de dire que l'on fait *varier* le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{5}{7}$, ou que l'on donne des *accroissements* à ces deux termes; on est convenu encore de dire que si les deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$ reçoivent des accroissements égaux, aussi grands qu'on veut,

la fraction $\frac{5}{7}$ croîtra, mais que la *limite* de cette fraction sera l'unité. On pourra faire en sorte que les fractions que l'on obtient approchent de l'unité d'aussi près qu'on voudra, ou, en d'autres termes, on peut faire en sorte que la fraction $\frac{5}{7}$, en variant, vienne à différer infiniment peu de sa limite 1; mais jamais elle n'atteindra cette limite.

Dans cet énoncé on regarde donc les fractions $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{9}$, etc., comme les valeurs que prend une grandeur *abstraite*, qu'on désigne ici sous le nom de *fraction variable* ou simplement *variable*, et l'on ajoute que cette variable peut s'approcher indéfiniment de sa limite 1.

Définition II. En général lorsque l'on considère plusieurs grandeurs assujéties à un nom, à une définition commune, on dit quelquefois que ce sont des valeurs d'une *même variable;* si ces quantités, rangées par ordre de grandeur, vont en croissant ou en décroissant, mais sans dépasser, ni même atteindre une certaine valeur déterminée dont elles peuvent s'approcher d'aussi près qu'on veut, on dit que les valeurs de cette variable ont pour *limite* cette valeur déterminée.

Il arrive ainsi que les démonstrations roulent sur plusieurs espèces de grandeurs : 1° les unes sont données et déterminées par la nature même de la question; 2° d'autres sont arbitraires et peuvent être rendues aussi petites qu'on veut, ou peuvent être remplacées chacune d'une infinité de manières par d'autres aussi petites qu'on veut; 3° d'autres enfin se composent d'une combinaison par addition ou soustraction d'une grandeur de la première espèce avec une grandeur de la seconde.

Les grandeurs de la première espèce ne changeant pas dans le même raisonnement, on les appellera des grandeurs *invariables finies*. Celles de la seconde et de la troisième sont *variables*. Mais celles de la seconde sont infiniment petites, leur *limite* est zéro, tandis que celles de la troisième ont une limite différente de zéro; on peut les appeler des *variables finies*.

Des définitions et explications précédentes il suit que :

1° *La somme ou la différence de deux infiniment petits est infiniment petite.* Car pour rendre la somme de deux infiniment petits plus petite qu'une grandeur donnée, il suffit de rendre chacun d'eux moindre que la moitié de cette grandeur. Il en est de même de la somme de trois, quatre, et en général d'un nombre donné d'infiniment petits. Quant à la différence de deux infiniment petits, elle est, en valeur absolue, moindre que le plus grand des deux; donc elle est infiniment petite.

2° *Le produit d'une quantité finie par un infiniment petit, ainsi que le produit de deux infiniment petits, est un infiniment petit.* S'il s'agit par exemple du produit d'un infiniment petit par un nombre 100, et si l'on demande de rendre ce produit plus petit qu'une quantité donnée, il suffira de rendre cet infiniment petit moindre que la centième partie de cette quantité donnée. Quant au produit de deux infiniment petits, la propriété est évidente.

3° *Une même grandeur variable ne saurait avoir deux limites différentes.* Car si la variable est comprise entre ses deux prétendues limites, en s'approchant de l'une elle s'éloigne de l'autre. Si elle est plus petite que chacune des deux, la différence qui existera entre cette variable et la plus grande des deux limites sera toujours plus grande que la différence de ces deux limites; donc elle ne saurait à la fois différer infiniment peu de chacune des deux. Il en sera de même si cette variable est plus grande que chacune des deux limites.

4° *Si* a *et* b *diffèrent infiniment peu de* a′ *et* b′; 1° *la somme* a + b *différera infiniment peu de* a′ + b′; 2° *la différence* a — b de a′— b′, et 3° *le produit* ab *du produit* a′b′. Car, 1°, $a + b - (a' + b')$ est égal à $a + b - a' - b'$ ou à $a - a' + b - b$; or, $a - a'$, $b - b'$, sont, par hypothèse, infiniment petits; leur somme l'est donc; 2°, $a - b - (a' - b')$ est égal à $(a - a\ ) - (b - b')$, différence qui est aussi infiniment petite; 3° enfin $ab - a'b'$ sera infiniment petit, car soit α, la différence entre a et a', β celle de b et b', de sorte que $a = a' + \alpha$, $b = b' + \beta$; on aura $ab = a'b' + a'\beta + b'\alpha + \alpha\beta$; on voit donc que la différence entre ab et $a'b'$, se composant des trois infiniment petits $a'\beta$, $b'\alpha$, $\alpha\beta$, est infiniment petite.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Soient a, b, c, d, etc., *des variables ayant chacune leur limite* A, B, C, D, *etc.*; *dans toute relation entre ces variables, pourvu que cette relation soit de la forme* a + b + . . . = c + d + . . ., *on peut remplacer les quantités variables par leurs limites, de sorte qu'on aura*

$$A + B + \ldots = C + D + .$$

Car $a, b, c, d \ldots$ différant infiniment peu de A, B, C, D . . . la somme $a + b + \ldots$ diffère infiniment peu de $A + B \ldots$ et $c + d +$ de $C + D$, etc.; donc $A + B + \ldots$ est la limite de $a + b + \ldots$, et $C + D$, etc., de $c + d \ldots$; mais deux variables égales ont des limites égales (3°); donc $A + B + \ldots = C + D +$.

Remarque 1. Il est clair que $a, b, c, d \ldots$ peuvent être des pro-

duits de facteurs, les uns variables, les autres invariables; ces derniers se retrouvent dans A, B, C, D...; les premiers y sont remplacés par leurs limites.

Remarque 2. La relation dont il s'agit dans l'énoncé du théorème I peut être une proportion telle que $a : b :: c : d$; car de là on conclut $ad = bc$, et pour les limites AD = BC, ou A : B :: C : D.

Remarque 3. Le théorème I s'énonce encore ainsi : *On peut négliger l'infiniment petit à côté des quantités invariables.* Pour sentir l'identité de ces deux énoncés, on n'a qu'à représenter par α, β, γ, ϑ, les différences infiniment petites entre les variables a, b, c, d et leurs limites A, B, C, D, etc., de sorte que $a = A + \alpha$, $B = b + \beta$, etc., et la relation $a + b + \ldots = c + d + \ldots$ devient

$$A + \alpha + B + \beta + \ldots = C + \gamma + D + \vartheta +$$

or, écrire $A + B + \ldots = C + D + \ldots$ comme il est démontré qu'on peut le faire, c'est supprimer à la fois tous les infiniment petits α, β, γ, ϑ.

Rapport des longueurs et des angles. On peut multiplier une longueur par un nombre entier.

On conçoit aussi le quotient d'une longueur par un nombre entier : ainsi, on sait (l. 2, p. 12) diviser une droite en 2, 4, 8, etc., parties égales, c'est-à-dire la diviser par 2, 4, 8, etc. Quoique nous ne sachions pas encore diviser une droite en 3, 5, 7, etc., parties égales, il n'en est pas moins vrai que le tiers, le cinquième, le septième d'une longueur sont des grandeurs qui existent. Car une longueur donnée peut augmenter par degrés aussi petits qu'on veut, c'est-à-dire que la longueur est une grandeur *continue*.
Fig. 57. Si donc on suppose qu'un point mobile parte du point A pour parcourir la distance AB, les distances successives de ce point mobile par rapport au point A, offriront tous les états de grandeur, depuis la grandeur nulle jusqu'à AB; elles offriront donc aussi $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, etc., de AB.

D'après cela on peut aussi concevoir le produit d'une longueur par un nombre fractionnaire, comme $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, etc.

Quant au produit d'une longueur par un nombre incommensurable tel que $\sqrt{3}$, comme il y a des nombres commensurables qui approchent de $\sqrt{3}$ d'aussi près qu'on voudra,

on regardera $A\sqrt{3}$ comme compris entre les produits de A par deux nombres commensurables, l'un plus petit, l'autre plus grand que $\sqrt{3}$, et différant d'ailleurs entre eux d'aussi peu qu'on voudra.

Ce qu'on vient de dire sur les longueurs peut s'appliquer aux angles.

Définition III. Le *rapport* de deux longueurs ou de deux angles est un nombre abstrait tel que le produit de la seconde de ces grandeurs par ce nombre est égal à la première.

Remarque 1. Si donc le rapport d'une ligne A avec une ligne B est $\frac{3}{5}$, c'est qu'on aura $A = \frac{3}{5}B$. Or, multiplier B par $\frac{3}{5}$, c'est prendre le cinquième de B et le répéter 3 fois. Ainsi le rapport, supposé commensurable, indique que si l'on divise la seconde en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, la première en contiendra autant qu'il y a d'unités dans le numérateur.

Remarque 2. Le rapport de deux grandeurs peut se déterminer toutes les fois qu'on connait les rapports de ces deux grandeurs avec une troisième. Ainsi supposons que l'on ait deux grandeurs A et B dont les rapports avec une troisième C soient $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{7}$; on aura donc

$$A = \frac{3}{2}\times C,\ B = \frac{5}{7}\times C \text{ d'où } C = \frac{7}{5}\times B;$$

remplaçant C par cette valeur dans A, on a

$$A = \frac{3}{2}\times\frac{7}{5}\times B.$$

Le rapport de A à B est donc $\frac{3}{2}\times\frac{7}{5}$ ou $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ c'est-à-dire qu'il est égal au quotient des rapports de A et B avec C.

Remarque 3. Le rapport de deux grandeurs peut encore être regardé comme le quotient de la division de l'une de ces grandeurs par l'autre, de sorte que nous pourrons nous servir des notations $\frac{A}{B}$ et A : B pour indiquer le rapport.

Définition iv. On entend par *commune mesure* de deux grandeurs de même espèce, une troisième grandeur de même espèce, qui est contenue un nombre entier de fois dans chacune des deux premières, ce qu'on exprime encore en disant que la commune mesure les divise toutes les deux.

Si une grandeur M est une commune mesure de deux grandeurs A et B, il est clair que toute partie aliquote de M est aussi une commune mesure de A et B.

Parmi toutes les communes mesures de deux grandeurs, il y en a nécessairement une qui est plus grande que les autres.

Définition v. Deux grandeurs sont dites *commensurables* entre elles, lorsqu'elles ont une commune mesure. Dans le cas contraire elles sont dites *incommensurables* entre elles.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

Trouver la plus grande commune mesure de deux droites AB, CD, *données de longueur*, si toutefois elles ont une commune mesure.

Fig. 57. Si l'on porte la plus petite droite CD sur la plus grande AB autant de fois que faire se peut, il arrivera de deux choses l'une: ou elle y est contenue un nombre entier de fois, ou bien il y aura un reste moindre que CD. Dans le premier cas CD serait la plus grande commune mesure et l'opération se trouverait terminée. Supposons donc que le second cas soit celui qui se présente; admettons que CD soit contenu dans AB, 2 fois et qu'il y ait un reste B'B, moindre que CD, on aura

$$AB = 2 \times CD + BB',$$

et je dis que la plus grande commune mesure de AB et de CD sera la même que celle de CD et de BB′.

En effet la plus grande commune mesure de AB et de CD, divisant exactement ces deux lignes, divisera la somme AB et l'une de ses parties 2 × CD, elle divisera donc aussi l'autre BB′. Mais divisant CD et BB′ elle est une commune mesure à ces deux lignes et ne saurait, par conséquent, surpasser leur plus grande commune mesure. D'un autre côté, la plus grande commune mesure de CD et BB′, divisant CD, divisera aussi 2 × CD ; donc elle divise les deux parties 2 × CD et BB′, par suite elle divisera leur somme AB. Ainsi la plus grande commune mesure de CD et BB′ divise AB et CD, et ne saurait surpasser la plus grande commune mesure de ces lignes. Donc la plus grande commune mesure de AB, CD et celle de CD et BB′ ne peuvent se surpasser l'une l'autre, et sont égales.

Maintenant portons BB′ sur CD, et si BB′ est contenu exactement dans CD, BB′ sera la plus grande commune mesure. Sinon, il y aura un reste que l'on portera sur BB′, et l'on continuera ainsi à comparer chaque reste avec le précédent, comme dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Deux cas sont possibles : ou bien on finira par trouver un reste qui sera contenu un nombre entier de fois dans le précédent, alors ce dernier reste sera la plus grande commune mesure ; ou bien l'on n'arrivera jamais à un reste qui soit contenu exactement et sans reste dans le précédent : dès lors les deux longueurs données n'ont pas de commune mesure et sont incommensurables entre elles.

Remarque 1. Lorsqu'on a deux arcs de même rayon, on peut porter le plus petit sur le plus grand au moyen de la corde du premier. On peut donc chercher la commune mesure de deux arcs de même rayon. Fig. 58.

Enfin, comme on sait aussi faire un angle égal à un angle

donné (l. 2, p. 17), on pourra aussi chercher la commune mesure de deux angles.

PROPOSITION III.

PROBLÈME.

Fig. 57. *Trouver la valeur exacte ou approchée du rapport de deux droites AB, CD données de grandeur.*

On cherchera la plus grande commune mesure des deux longueurs AB, CD. S'il y en a une, elle sera contenue un nombre entier de fois dans AB et CD, ce qui déterminera le rapport de chacune de ces lignes avec la commune mesure, et ces deux rapports, divisés l'un par l'autre, donneront le rapport AB : CD. (d. 3, r. 2).

Supposons que dans la figure le reste DD′ soit contenu deux fois dans BB′, et que BB′ soit contenu 3 fois dans CD, outre le reste DD′. Ce dernier reste sera la commune mesure, laquelle sera contenue 7 fois dans CD, et comme d'ailleurs $AB = 2\,CD + BB'$, on aura $AB = 2 \times 7 . DD' + 2\,DD' = 16\,DD'$, et comme $CD = 7\,DD'$, le rapport de AB à CD sera $\frac{16}{7}$ (d. 3, r. 2).

Si l'on ne trouve pas de commune mesure, ou qu'on sache d'une manière quelconque qu'il n'y en a pas, on peut néanmoins trouver ce rapport avec tel degré d'approximation qu'on veut.

En effet, soient A et B deux lignes incommensurables; divisons B en 2 parties égales, et supposons qu'une de ces parties soit contenue dans A, 5 fois avec un reste. A sera $> 5 . \frac{B}{2}$ et $< 6 . \frac{B}{2}$ Ainsi le rapport de A à B sera entre $\frac{5}{2}$ et $\frac{6}{2}$. Prenons le quart de B; supposons que ce quart soit contenu dans A plus de 10 fois et moins de 11 fois. Le rapport de A à B sera compris entre $\frac{10}{4}$ et $\frac{11}{4}$; on le con-

naîtra donc à moins de $\frac{1}{4}$ près. On divisera de même B en 8, 16, 32, 64, etc., parties égales, et l'on pourra trouver $\frac{A}{B}$ à moins de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, etc., près.

De cette manière on assignera des longueurs commensurables avec B, et dont les rapports avec cette ligne diffèrent de $\frac{A}{B}$ de quantités moindres que $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, etc.

Remarque. En général, si deux longueurs sont incommensurables entre elles, on peut assigner une ligne A′ commensurable avec B et qui diffère de A d'aussi peu qu'on voudra. Car on n'a qu'à diviser B en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales; on obtiendra ainsi des parties aussi petites qu'on voudra, et si l'on porte une de ces parties sur A autant de fois qu'elle y est contenue, et qu'on néglige le reste, on aura la ligne A′ demandée, laquelle sera commensurable avec B, puisqu'elle contient exactement un certain nombre de parties égales de B, de sorte que si B a été, par exemple, divisé en 512 parties égales, la 512ᵉ partie de B sera la commune mesure entre B et A′, et cette ligne A′ différera de A d'une quantité moindre que $\frac{1}{512}$ de B.

Remarque 2. Enfin tout ce qu'on vient de dire sur les droites, s'applique aux arcs de cercles et aux angles.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Soient deux grandeurs A, B *et deux longueurs* a, b *telles que si* a *ou* b *varie d'une manière continue, il en soit de même de* A *ou de* B; *soient de plus deux quantités* c, d, *qui ne changent pas lorsqu'on fait varier* a *ou* b; *si toutes les fois que* a *et* b *sont commensurables entre eux on a la proportion* A : B :: ca : db, *je dis que cette proportion aura encore lieu si* a *et* b *ne sont pas commensurables entre eux.*



En effet supposons que a et b ne soient pas commensurables entre eux ; faisons varier a infiniment peu, de façon qu'il se change en a' et devienne commensurable avec b, A variera infiniment peu et se changera en une quantité A' ; on aura donc, vu que a' et b sont commensurables,

$$A' : B :: ca' : db$$

et, négligeant les infiniment petits (p. 1, r. [illegible]),

$$A : B :: ca : db.$$

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Deux angles BAC, DEF *sont dans le même rapport que les arcs* BC, DF *interceptés entre leurs côtés*, et *décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux.*

Si les arcs BC, DF ont une commune mesure, portons-la sur ces deux arcs et supposons-la contenue, par exemple, 5 fois dans BC et 3 fois dans DF; soient a, b, c, d, e, f les points de division. En joignant ces points aux centres respectifs, on obtient des angles BAa, etc., tous égaux comme interceptant des arcs égaux dans des cercles égaux (l. 2, p. 4). L'angle BAC en contient 5, tandis que DEF en renferme 3; donc le rapport de ces deux angles est égal à $\frac{5}{3}$; mais celui des arcs [1] BC, DF est aussi $\frac{5}{3}$. Ces deux rapports sont donc égaux et donnent la proportion BAC : DEF :: BC : DF.

[1] Comme l'angle varie par degrés infiniment petits lorsque l'arc varie de cette manière, il s'ensuit (p. 4) que cette proportion subsiste encore lorsque les arcs n'ont pas de commune mesure.

Remarque 1. Rien n'empêche de supposer que l'un des arcs est une circonférence entière, et que l'angle correspondant est, par conséquent, égal à 4 angles droits.

[1] Voir une note à la fin de l'ouvrage.

Remarque 2. La propriété démontrée dans cette proposition s'exprime aussi par l'énoncé suivant : *L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire.* On attache à cet énoncé le même sens qu'à celui de la Prop. 5.

L'angle droit intercepte le quart de la circonférence décrit de son sommet comme centre, ainsi qu'on l'a vu dans le courant de la Prop. 22, l. 2, fig. 51. Si donc on veut rapporter les angles à l'angle droit comme unité, il suffira de rapporter les arcs au quart de circonférence.

Dans un grand nombre d'applications on prend pour unité $\frac{1}{360}$ de la circonférence que l'on appelle *degré,* de sorte que la circonférence est supposée partagée en 360 parties égales; on subdivise le degré en 60 parties égales nommées *minutes,* la minute en 60 parties égales, nommées *secondes,* etc. Cette division est appelée *division sexagésimale.* L'angle droit a donc dans ce cas pour mesure un arc de 90 degrés. Les degrés, minutes, secondes s'indiquent par les signes °, ′, ″.

Remarque 3. 1° Puisque d'après la Prop. 22, l. 2, l'angle inscrit est égal à l'angle au centre qui intercepte la moitié du même arc, on peut dire que *l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* Il en est de même de l'angle formé par une tangente et une corde.

2° Tout angle inscrit dans un segment ABC plus grand qu'un demi-cercle, aura pour mesure la moitié d'un arc ADC, moindre que 180°, c'est-à-dire que sa mesure sera plus petite que 90°, et l'angle sera aigu. Au contraire, tout angle inscrit dans un segment ADC, plus petit qu'un demi-cercle, sera obtus. Fig. 52.

3° Dans le quadrilatère ABCD qui a ses quatre sommets sur la circonférence, les deux angles opposés B et D ont en somme pour mesure la moitié de la somme des arcs ADC, ABC, c'est-à-dire la moitié de la circonférence ou

180°. Ils valent donc ensemble deux angles droits. Il en est de même de la somme des angles BAD, BCD.

Fig. 78. 4° L'angle AOC qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs AC, BD interceptés par cet angle et son opposé au sommet. Car si l'on tire CB, l'angle AOC, extérieur au triangle COB est égal à la somme des angles intérieurs C et B (l. 1, p. 20, r.); mais ces deux angles sont inscrits et ont pour mesure, l'un la moitié de DB, l'autre celle de AC. Donc l'angle COA a pour mesure $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ DB.

Fig. 79. 5° L'angle O qui a son sommet hors du cercle et qui est formé par deux sécantes, a pour mesure la demi-différence des arcs BD, AC, qu'il intercepte. En effet, menons la corde BC; l'angle BCD, extérieur au triangle BCO, est égal à la somme des angles B et O; donc l'angle O est la différence des angles BCD, et B; mais ces deux angles sont inscrits et ont pour mesure, le premier, la moitié de l'arc BD, le second, la moitié de AC; donc l'angle O a pour mesure la moitié de BD moins la moitié de AC.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Fig. 80. *Si sur un côté d'un angle on prend des parties* AI, IK, KL, *etc., de grandeur quelconque, mais égales entre elles; que par les points* I, K, L, *etc., on mène des droites parallèles* IE, KF, LG, *etc., jusqu'à la rencontre de l'autre côté, elles détermineront sur ce côté des distances* AE, EF, FG, *etc., égales entre elles.*

Du point I menez la droite IO parallèle à EF jusqu'à la rencontre de KF en O; dans les deux triangles AIE, KIO on aura les angles IAE, KIO égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AE, IO coupées par KA; les angles AIE, IKO sont égaux par une raison semblable par rapport aux parallèles IE, KF coupées par la même sécante; d'ailleurs le côté AI = IK par hypothèse; donc ces deux

triangles ont un côté égal adjacent à des angles égaux et sont égaux. On en conclut que le côté AE = IO ; mais IO, EF sont égaux comme parallèles entre parallèles (l. 1, p. 19); donc aussi AE = EF ; on démontre de même que EF = FG = etc.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Pour qu'une droite DE *soit parallèle à un côté* BC *d'un* triangle ABC, *il faut et il suffit qu'elle divise les deux autres côtés* AB, AC *proportionnellement.* Fig. 61.

1° Supposons la droite DE parallèle à BC, je dis qu'on aura AD : DB :: AE : EC. Car si les droites AD et DB sont commensurables, supposons que AD : DB :: 4 : 3, c'est-à-dire que la commune mesure soit contenue 4 fois dans AD et 3 fois dans DB. Soient *a, b, c, d, e* les points de division; par ces points menons des parallèles à BC; ces droites *af, bg*... DE, etc., étant toutes parallèles, et les distances A*a*, *ab*, etc., étant égales, les distances A*f*, *fg*, etc., seront aussi égales (p. 6); mais AE en contiendra 4, parce que AD en contient 4, et EC en comprendra 3 parce que DB en comprend 3. Donc AE : EC :: 4 : 3; d'ailleurs AD : DB :: 4 : 3; donc enfin AD : DB :: AE : EC, d'où, *componendo* AD + DB : DB :: AE + EC : EC ou AB : DB :: AC : EC. On trouve de même AB : AD :: AC : AE.

Si AD et DB ne sont pas commensurables, comme EC varie d'une manière continue avec DB, on aura encore la même propriété (p. 4).

2° Si l'on mène une droite DE' non parallèle à BC, elle ne coupera pas les côtés AB, AC proportionnellement. Car menez DE parallèle à BC; on aura, comme on vient de le prouver, AD : DB :: AE : EC. Or, AE' est > AE, et E'C < EC; donc le rapport AE' : E'C est plus grand que

AE : EC, et par suite aussi plus grand que le rapport AD : DB. Ainsi la droite DE′ ne coupe pas les côtés AB, AC en parties proportionnelles. On prouverait de même qu'aucune droite menée par le point D, si elle n'est parallèle à BC, ne coupe AB et AC proportionnellement. Donc, toute droite qui coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, est parallèle au troisième côté.

Fig. 62. *Corollaire. Des droites parallèles* AA′ BB′, etc., *déterminent sur deux droites quelconques* AD, A D′ *qu'elles rencontrent, des segments proportionnels.* Car prolongez AD, A′D′ jusqu'à leur rencontre en un point O; la droite AA′, parallèle au côté BB′ du triangle OBB′, donne

OB : OB′ :: AB : A′B′.

De même, dans le triangle OCC′ on a

OB : OB′ :: BC : B′C′.

De ces deux proportions on déduit, à cause du rapport commun,

AB : A′B′ :: BC : B′C′,

On démontre de même que BC : B′C′ :: CD : C′D′, etc.

PROPOSITION VIII.

PROBLÈME.

Diviser une droite de longueur donnée en parties égales, ou en parties proportionnelles à des lignes données.

Fig. 63. 1° Supposons qu'il s'agisse de diviser la droite AB en 5 parties égales. Menez du point A une droite indéfinie AH sous un angle quelconque, et prenez-y, à partir du point A, une distance arbitraire qu'il faudra porter, à partir de ce même point A, 6 fois sur AH, et en général une fois de plus qu'il doit y avoir de divisions dans AB. Soient E, G, C les trois derniers points ainsi obtenus sur AH; joignez le point C au point B par la droite CB, et prolon-

gez celle-ci d'une quantité BD égale à BC; si l'on joint le point D au point E, la droite DE coupera AB en un point F, et BF sera la cinquième partie de AB. Car EG étant égal à GC et DB à BC, on a la proportion EG : GC :: DB : BC; donc (p. 7, 2°) la droite BG est parallèle à DE. Mais si DE ou FE est parallèle au côté BG du triangle ABG, c'est que les côtés AB, AG sont coupés proportionnellement en F et E, de sorte que l'on a

AG : EG :: AB : FB.

Or, EG est, par construction, le cinquième de AG; donc FB est aussi le cinquième de AB, et en portant FB encore 4 fois sur FA, on divisera AB en 5 parties égales.

2° S'il faut diviser une droite AB en parties proportionnelles à des longueurs données a, b, c, on tire du point A, sous un angle arbitraire, une droite indéfinie AC sur laquelle on prend AD $= a$, DE $= b$, EF $= c$; on joint le point F au point B, et des points E, D on mène des parallèles à FB jusqu'à la rencontre de AB; les points de rencontre H, G diviseront la droite AB de la manière demandée. Car à cause des parallèles GD, HE, BF on a (p. 7, c.) AG : AD :: GH : DE :: HB : EF, ou, puisqu'on a pris AD $= a$, DE $= b$ et EF $= c$, Fig. 64.

$$AG : a :: GH : b :: HB : c.$$

Donc la droite AB est divisée en G et H de la manière demandée.

Remarque. Cette dernière construction peut aussi servir à diviser la droite AB en parties égales. Pour cela on prend les distances AD, DE, etc, égales entre elles et en même nombre que les divisions qu'on veut avoir sur AB; puis on achève de la même manière.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

Fig. 65. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* a, b, c.

Soit fait un angle quelconque A, et soit pris AB = a, BC = b, AD = c. Si l'on tire BD et que du point C on mène CE parallèle à BD jusqu'à la rencontre de AD prolongé, en E, la ligne DE sera la quatrième proportionnelle demandée.

Car la droite BD, parallèle à un côté CE du triangle ACE, divise les deux autres côtés proportionnellement (p. 7). On a donc

AB : BC :: AD : DE

ou a : b :: c : DE;

donc DE est la ligne cherchée.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Fig. 66. *La bissectrice* AD *d'un angle* BAC *d'un triangle, divise le côté opposé* CB, *en deux segments* CD, DB *proportionnels aux côtés adjacents, de sorte que* CD : DB :: AC : AB, et *réciproquement.*

1° Prolongeons le côté CA indéfiniment vers E, et menons du point B une droite BE parallèle à la bissectrice AD jusqu'à la rencontre de ce prolongement en E. Dans le triangle CBE, la droite AD, parallèle au côté BE, donne (p. 7)

CD : DB :: CA : AE.

Mais à cause des parallèles AD, BE coupées par la sé-

cante CE, l'angle AEB est égal à CAD, moitié de CAB ; à cause des mêmes parallèles coupées par AB, l'angle ABE est égal à DAB qui est aussi moitié de CAB ; donc l'angle ABE = AEB ; par suite (l. 1, p. 6, c.) le triangle ABE est isoscèle, le côté AE est égal à AB, et si dans la proportion précédente on remplace AE par AB, on a CD : DB :: AC : AB.

2° Supposons qu'on ait CD : DB :: AC : AB, je dis que AD sera la bissectrice de l'angle CAB. Pour le prouver faisons la même construction que ci-dessus. On aura aussi CD : DB :: AC : AE. Comparant ces deux proportions, on voit qu'elles ont les trois premiers termes communs ; donc le quatrième aura la même valeur, et il vient AB = AE. Le triangle AEB est donc isoscèle, et l'angle AEB = ABE (l. 1, p. 5, c.). Mais à cause des parallèles AD, BE l'angle CAD = AEB et l'angle DAB = ABE. Donc les angles CAD, DAB sont égaux, et l'angle CAB est partagé en deux parties égales par la droite AD.

Remarque. La droite AF, bissectrice de l'angle extérieur BAE supplémentaire de CAB, détermine sur le prolongement de CB un point F, et deux segments CF, BF dont la différence est CB. On exprime ceci en disant que la droite CB est divisée au point F en deux segments *soustractifs*, tandis que le point D la partage en deux segments *additifs*, c'est-à-dire en deux segments dont la somme est CB.

Les deux segments CF, BF sont aussi proportionnels aux côtés CA, AB. En effet, soit mené BG parallèle à AF ; on aura CF : BF :: CA : GA. Mais à cause des parallèles, l'angle AGB = EAF, l'angle ABG = FAB. Donc AGB = ABG et dans le triangle AGB, le côté AG sera égal à AB. La proportion devient donc CF : BF :: CA : AB.

En comparant cette proportion avec CD : DB :: CA : AB, on en tire

CF : BF :: CD : DB.

Cette proportion prouve que le produit de la ligne entière CF, par le segment *moyen* DB, est égal au produit des deux segments *extrêmes* CD, BF; on la nomme *proportion harmonique;* les 4 points C, D, B, F, sont dits former un *système harmonique.*

Fig. 69. *Définition vi.* Deux figures sont dites *semblables* lorsqu'on peut les placer de façon qu'à chaque point A, B, C... pris dans l'une, corresponde dans l'autre un point *a*, *b*, *c*..., tel que les droites A*a*, B*b*, etc., qui joignent ces points correspondants, vont concourir en un même point O et y sont divisées en segments proportionnels, soustractifs pour toutes ces droites, ou additifs pour toutes, de sorte que OA : O*a* :: OB : O*b*, etc.

Définition vii. Lorsque les droites sont toutes divisées au point O en segments soustractifs, la similitude est dite *directe.* Dans le cas contraire, elle est dite *inverse.* Ici on considérera les deux cas.

Définition viii. Le point O se nomme *centre de similitude;* toute droite menée par ce point est appelée *rayon vecteur;* le rapport OA : O*a*, OB : O*b*, etc., se nomme *rapport de similitude.*

Définition ix. Dans deux figures semblables, deux points A, *a*, situés sur le même rayon vecteur de façon que le rapport OA : O*a* est égal au rapport de similitude, se nomment des *points homologues.*

Définition x. Deux droites dont l'une AB passe par deux points A et B, et l'autre *ab* par les homologues des premiers, sont dites *lignes homologues.* On peut les supposer prolongées indéfiniment. Les distances AB, *ab* se nomment des *dimensions homologues.*

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Si dans deux figures semblables à une troisième, deux dimensions homologues à une même dimension de cette troisième figure sont égales, ces deux premières figures sont égales. Fig. 67.

Soient A, B, C trois points quelconques de la troisième figure; a, b, c, leurs homologues dans la première, par rapport au centre de similitude O; a', b', c', etc., les homologues de ces mêmes points A, B, C... dans la seconde figure par rapport au centre de similitude O'; si l'on suppose ab égal à $a'b'$, je dis que les figures abc..., $a'b'c'$... sont superposables. En effet, d'après la définition 6, on a la proportion OB : Ob :: OA : Oa. Ainsi la droite ab, qui coupe proportionnellement les côtés OB, OA du triangle OAB est (p. 7) parallèle au côté AB; par une raison semblable ac est parallèle à AC : donc les angles BAC, bac qui ont leurs côtés respectifs parallèles et de même sens (dans le cas de la similitude inverse, parallèles et de sens contraire), sont égaux. On prouvera de même que l'angle $b'a'c'$ est égal à BAC. Donc $bac = b'a'c'$.

De plus, si l'on mène du point a la droite aD parallèle à OB jusqu'à la rencontre de AB en D, on aura dans le triangle ABO (p. 7)

AB : BD :: AO : aO remplaçant BD par son égal ab, il vient AB : ab :: AO : aO.

On a de même AC : ac :: AO : aO, d'où, à cause du rapport commun AO : aO, on aura AB : ab :: AC : ac.

Par un raisonnement semblable, on établira la proportion

AB : $a'b'$ :: AC : $a'c'$.

Remarquant que par hypothèse $ab = a'b'$, on reconnaît que ces deux dernières proportions ont les trois premiers termes communs, et l'on conclut que $ac = a'c'$. Donc, si l'on superpose $a'b'$ sur son égal ab, à cause de l'angle $bac = b'a'c'$, le côté $a'c'$ prendra la direction de ac, et comme $ac = a'c'$, le point c' tombera en c. On verra de même que tout autre point de la figure $a'b'c'$... coïncide avec un point de abc... Donc ces deux figures sont superposables.

Corollaire 1. Pour construire une figure semblable à une figure donnée ABC, etc., sur une dimension donnée ab homologue à AB, on peut prendre à volonté le centre de similitude, puisque toutes les figures ainsi obtenues sont superposables.

Corollaire 2. *Dans deux figures semblables, le rapport des dimensions homologues est constant et égal au rapport de similitude.* Car on vient de prouver la proportion AB : ab :: OA : Oa. Mais AB, ab sont deux dimensions homologues (d. 10), et OA : Oa est le rapport de similitude (d. 8); donc, etc.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Fig. 68. *Si trois points* A, B, C *sont sur une droite, leurs homologues* a, b, c, *par rapport à un centre de similitude quelconque* O, *sont aussi sur une droite parallèle à la première.*

En effet, d'après la définition 6, on a OA : Oa :: OB : Ob, proportion qui prouve (p. 7) que ab est parallèle à AB; de même bc est parallèle à BC, et comme d'un point b on ne peut mener qu'une parallèle à AC (l. 1, p. 14), il s'ensuit que abc est une droite parallèle à AC.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Toute figure semblable à un polygone est un second polygone ayant autant de côtés que le premier. Fig. 69.

Soit ABCDE un polygone; prenons un point quelconque O pour centre de similitude, et tirons les rayons vecteurs OA, OB, etc., aux sommets de ce polygone. Prenons les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sur ces rayons, de façon que l'on ait OA : O*a* :: OB : O*b* :: OC : O*c*, etc., et à cet effet, après avoir pris à volonté le point *a*, on peut mener *ab* parallèle à AB, *bc* parallèle à BC et ainsi de suite. D'après la proposition 12, les points homologues des points de AB seront tous sur *ab*; les homologues des points de BC seront tous sur *bc*, etc.; donc la figure semblable à ABCDE est un polygone *abcde*, ayant autant de côtés que le premier.

Corollaire. Pour que deux polygones soient semblables, il suffit qu'on puisse les placer de façon qu'à chaque sommet A de l'un réponde dans l'autre un sommet *a*, qui soit homologue de A par rapport à un centre de similitude, pourvu toutefois que deux sommets *a*, *b* ne déterminent un côté que si leurs homologues A, B en déterminent un; mais aussi pourvu que deux sommets *a*, *b* déterminent un côté si leurs homologues A, B en déterminent un. En effet, si ces conditions sont remplies, chaque point K, pris sur le contour de l'un des polygones, aura son homologue *k* sur le contour de l'autre, et pour trouver *k*, il suffit de joindre KO et de prendre l'entersection de cette droite avec le côté *ed* déterminé par les points homologues de E, D qui déterminent le côté sur lequel on a pris K.

Définition xi. Dans deux polygones semblables les sommets qui sont des points homologues se nomment des

sommets homologues; les angles auxquels ces points servent de sommets sont nommés *angles homologues;* les côtés qui joignent des sommets homologues sont nommés *côtés homologues*, et les diagonales qui joignent des sommets homologues sont appelées *diagonales homologues.*

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Deux polygones semblables ont les angles homologues égaux et les côtés homologues proportionnels; réciproquement, *si dans deux polygones les angles sont égaux deux à deux, et si les côtés adjacents aux angles égaux sont proportionnels, ces polygones sont semblables.*

Fig. 69. 1° Soient ABCDE, *abcde* deux polygones semblables, O un centre de similitude. Puisque OA : O*a* :: OB : O*b*, le côté *ab* est parallèle à AB, de même *bc* est parallèle à BC, et l'angle *abc* est égal à ABC; de même BCD = *bcd*, CDE = *cde*, etc. De plus, on a prouvé (p. 11, c. 2) que les dimensions homologues sont dans le rapport de similitude; donc les rapports AB : *ab*, BC : *bc*, CD : *cd*, etc., sont égaux, et par suite, les côtés homologues sont proportionnels.

2° Réciproquement, soient deux polygones ABCDE, $a''b''c''d''e''$ ayant les angles A = a'', B = b''... E = e'', et les côtés proportionnels, de sorte que AB : $a''b''$ :: BC : $b''c''$ :: etc. Je dis que ces polygones sont semblables. Pour le prouver, supposons $a''b'' < $ AB, et soit pris *ab* parallèle à AB et égal à $a''b''$; tirons A*a*, B*b* qui se couperont en un point O; enfin tirons OC, OD, OE, du point *b*; menons *bc* parallèle à BC, *cd* à CD, *de* à DE; joignons *ae* qui sera aussi parallèle à AE : car à cause des parallèles on a OA : O*a* :: OB : O*b* :: etc. :: OE : O*e*; les côtés OA, OE étant ainsi coupés proportionnellement, *ae* est parallèle à

AE (p. 7). Le polygone *abcde* sera semblable à ABCDE (d. 6); je dis qu'il est égal à $a''b''c''d''e''$. En effet, les polygones ABCDE, *abcde* étant semblables, on a l'angle $a =$ A; mais par hypothèse $a'' =$ A; donc $a = a''$; de même $b = b''$, $c = c''$, $d = d''$, $e = e''$. De plus, la similitude des mêmes polygones ABCDE, *abcde* donne

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Mais par hypothèse $AB : a''b'' :: BC : b''c''$, et comme $a''b'' = ab$, ces deux proportions ont les 3 premiers termes communs; donc $bc = b''c''$. On démontre de même que $cd = c''d''$, $de = d''e''$, $ea = e''a''$. Donc les deux polygones *abcde*, $a''b''c''d''e''$ sont égaux et superposables, et par suite $a''b''c''d''e''$ est semblable à ABCDE.

Corollaire 1. Deux polygones semblables à un troisième sont semblables entre eux. Car en comparant chacun des deux premiers polygones au troisième on voit que ces deux premiers polygones ont les angles égaux deux à deux et les côtés proportionnels.

Corollaire 2. Des proportions $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd$, etc., on tire

$$AB + BC + CD + \ldots : ab + bc + cd + \ldots :: AB : ab :: BC : bc :: \text{etc.}$$

Ainsi *les contours ou périmètres de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues.*

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Deux polygones semblables peuvent se décomposer en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés. Réciproquement *deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Fig. 69. Soient les polygones ABCDE, *abcde* supposés semblables, O le centre de similitude. D'un sommet quelconque A menons des diagonales aux autres sommets du polygone ABCDE; dans le polygone *abcde* menons les diagonales homologues (d. 11). Les triangles ABC, *abc* sont semblables; car ils sont placés de façon que les droites A*a*, B*b*, C*c* vont concourir en O, et y sont divisées en segments proportionnels (p. 13, c.). On reconnaît de même que le triangle ACD est semblable à *acd*, et que ADE l'est à *ade*.

De plus les deux systèmes de triangles sont semblablement disposés, c'est-à-dire que si d'un côté on considère deux triangles ABC, ACD qui ont un côté commun, et de l'autre les triangles *abc*, *acd*, semblables à ceux-là, ces deux derniers ont aussi un côté commun; en outre, les angles adjacents à l'une des extrémités A du côté commun aux deux premiers triangles sont les homologues respectifs de ceux qui sont adjacents à l'une des extrémités *a* du côté commun aux deux derniers; il en est de même en C et *c*. Enfin, les triangles ABC, ACD se trouvant situés de différents côtés par rapport à AC, il en est de même de *abc*, *acd* par rapport à *ac*.

Réciproquement, supposons que les deux polygones ABCDE, *abcde* soient composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés. Soit le triangle ABC semblable à $a''b''c''$, ACD à $a''c''d''$, etc. A cause des triangles semblables ABC, $a''b''c''$ (p. 14), l'angle ABC sera égal à $a''b''c''$, l'angle BCA à $b''c''a''$, par une raison semblable l'angle ACD $=$ $a''c''d''$, et l'angle total BCD sera égal à $b''c''d''$, et ainsi des autres, de sorte que les deux polygones auront les angles égaux deux à deux. D'ailleurs les triangles semblables donnent encore (p. 14) :

$$AB : a''b'' :: BC : b''c'' :: AC : a''c'' :: CD : c''d'' ::, \text{etc.}$$

Ainsi, non-seulement dans ces deux polygones les angles sont égaux deux à deux, mais encore les côtés adjacents aux angles égaux sont proportionnels. Donc (p. 14, 2°) ces polygones sont semblables.

Remarque 1. Si les triangles semblables n'étaient pas semblable-

ment disposés, les deux polygones ne seraient pas semblables. Par exemple, supposons toujours que l'angle $b''c''a''$ = BCA, mais que l'angle égal à ACD n'ait pas son sommet en c''; l'angle $b''c''d''$ ne sera pas égal à BCD.

Remarque 2. Dans les propositions 13, 14, 15 rien n'empêche de remplacer le point O par O', et le polygone *abcde* par $a'b'c'd'e'$ qui a ses côtés respectivement parallèles et de sens contraire aux côtés correspondants de ABCDE.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Deux triangles ABC, abc *sont semblables* 1° *s'ils ont les côtés proportionnels;* 2° *s'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels;* 3° *s'ils ont les angles égaux chacun à chacun.*

1° Supposons qu'on ait AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*. Fig. 70.
Prenons une droite $a'b'$ égale à *ab* et parallèle à AB; tirons Aa', Bb' qui se couperont en un point O; tirons OC; menons du point b' la droite $b'c'$ parallèle à BC jusqu'à la rencontre de OC en c'; joignons $a'c'$. Les droites OA, OB, OC seront coupées proportionnellement en a', b', c' (p. 7), et le triangle $a'b'c'$ sera semblable à ABC (p. 13, c.). Donc on a (p. 14)

$$AB : a'b' :: AC : a'c' :: BC : b'c'.$$

Mais par hypothèse AB : *ab* :: AC : *ac* :: BC : *bc*.
Or, par construction $ab = a'b'$; donc aussi $a'c' = ac$, $b'c' = bc$, et les deux triangles *abc*, $a'b'c'$ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Mais $a'b'c'$ est semblable à ABC; donc *abc* l'est aussi.

2° Supposons que l'angle *a* soit égal à BAC et qu'on ait la proportion AB : *ab* :: AC : *ac*. Ayant fait la même construction que dans le premier cas on aura AB : $a'b'$ :: AC :

$a'c'$, d'où l'on conclura que $ac = a'c'$. De plus, l'angle $b'a'c'$ sera égal à BAC (p. 14), et par suite à l'angle a; donc les deux triangles abc, $a'b'c'$ ont un angle égal compris entre côtés égaux; donc ils sont égaux. Mais $a'b'c'$ est semblable à ABC; donc abc l'est aussi.

3° Soit l'angle $a =$ BAC, l'angle $b =$ ABC et $c =$ ACB. Ayant encore fait la même construction, on aura dans les triangles semblables ABC, $a'b'c'$, l'angle $b'a'c' =$ BAC, et par suite égal à a; de même l'angle $a'b'c' = b$. Donc les deux triangles abc, $a'b'c'$ sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux. Mais le triangle $a'b'c'$ est semblable à ABC; donc abc l'est aussi.

Remarque 1. Dans les triangles semblables les côtés homologues sont opposés à des angles égaux. Car le côté ab étant homologue à AB, les angles a et b, adjacents à ab, sont égaux à A et B adjacents à AB (p. 13); donc aussi les angles c, C, opposés aux côtés homologues ab, AB, sont égaux.

Remarque 2. Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun. Car dès lors le troisième est aussi égal de part et d'autre (1, 1, p. 20, c. 1), et les triangles sont semblables.

Remarque 3. La proposition précédente prouve que dans les triangles l'égalité des angles est une suite de la proportionnalité des côtés et réciproquement. Il n'en est pas de même dans les figures de plus de trois côtés. Car pour ne parler que des quadrilatères, soit la figure ABCD; si l'on mène à volonté la droite FE parallèle à DC, le quadrilatère ABFE aura les mêmes angles que ABCD; mais comme le côté AB est commun et que AF est différent de DC, les côtés adjacents aux angles égaux ne seront pas proportionnels. Ainsi sans changer les angles, on peut changer les rapports des côtés. De plus, si sur une droite plus petite ou plus grande que la diagonale DB on construit deux

Fig. 71.

triangles, l'un d'un côté avec BC et DC, l'autre de l'autre côté avec AB, AD, on aura un second quadrilatère renfermant les mêmes côtés avec des angles différents.

Remarque 4. Les trois cas de la proposition 16 sont les cas fondamentaux de la similitude des triangles. Ceux que renferme la proposition suivante rentrent tous les deux dans le 3e des précédents, et dépendent de la position relative des deux figures.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Deux triangles sont semblables s'ils ont les côtés parallèles ou perpendiculaires deux à deux.

1° Soient deux triangles ABC, A′B′C′ ayant le côté AB parallèle à A′B′, AC à A′C′, BC à B′C′. Je dis qu'ils sont semblables. Car les angles A et A′, qui ont les côtés parallèles, sont égaux ou supplémentaires (l. 1, p. 17); il en est de même de B et B′, de C et C′. Or, si A et A′ étaient supplémentaires, la somme A + A′ serait égale à 2 droits; si en même temps B et B′ étaient supplémentaires, la somme B + B′ serait aussi égale à 2 droits; donc la somme des 4 angles A, A′, B, B′ serait égale à 4 droits, ce qui ne se peut puisque la somme de tous les six angles des deux triangles vaut 4 droits (l. 1, p. 20). Donc il est impossible que deux angles du triangle ABC soient supplémentaires de deux angles du triangle A′B′C′. Ainsi, dans le triangle ABC il y a tout au plus un angle qui puisse être supplémentaire d'un angle de A′B′C′; mais si les autres ne sont pas supplémentaires 2 à 2, ils sont égaux. Donc les triangles proposés ont au moins deux angles égaux chacun à chacun; par conséquent le troisième angle est aussi égal de part et d'autre (l. 1, p. 20, c. 1); et les deux triangles sont semblables (p. 16, 3°). Fig. 72.

2°. Dans le cas des côtés perpendiculaires la démonstration est la même, vu que deux angles qui ont les côtés perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires (l. 1, p. 17).

Remarque. Puisque les angles A, A′, qui ont les côtés parallèles, sont égaux, il s'ensuit que les côtés opposés BC, B′C′, qui sont aussi parallèles, sont homologues. Ainsi, dans le cas des côtés parallèles, ce sont les côtés parallèles qui sont homologues, et dans le cas des côtés perpendiculaires, ce sont les côtés perpendiculaires qui le sont.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux parallèles AB, ab *coupées par des droites* OA, OB, etc., *qui concourent au même point* O, *sont divisées proportionnellement*, de sorte qu'on aura AB : *ab* :: BC : *bc*
Fig. 73. :: CD : *cd*.

En effet, puisque *ab* est parallèle à AB, les deux triangles OAB, O*ab*, qui ont déjà un angle commun en O, ont aussi les deux autres angles égaux chacun à chacun, et sont semblables (p. 16, 3°); donc on a AB : *ab* :: OB : O*b*.

Les deux triangles semblables OBC, *obc* donnent aussi BC : *bc* :: OB : O*b*, d'où, à cause du rapport commun, AB : *ab* :: BC : *bc*. On prouve de même que BC : *bc* :: CD : *cd*. Donc AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd*.

La démonstration est la même dans le cas où le point O est entre les deux parallèles, comme cela a lieu par rapport à *a′b′* et AB.

Corollaire. On déduit de là le moyen de résoudre le pro-
Fig. 74. blème de la prop. 8. S'il s'agit de diviser une droite M en parties proportionnelles aux droites *l*, *k*, *i*, sur une droite indéfinie prenez AB = *l*, BC = *k*, CD = *i*, et sur AD dé-

crivez un triangle équilatéral AOD; portez M de O en *a* et de O en *b*, tirez *ad* et joignez le point O aux points B, C, par les droites OB, OC qui coupent la droite *ad* aux points *b*, *c*. Je dis que la droite *ad* est égale à M, et qu'elle est divisée en *b*, *c*, proportionnellement aux droites *l*; *k*, *i*. En effet, puisque O*a* = O*d* et que OA = OD, on a la proportion OA : O*a* :: OD : O*d*, d'où l'on conclut que les triangles OAD, O*ad* ont un angle commun en O compris entre côtés proportionnels, et sont semblables (p. 16, 2°); mais le triangle OAD étant équilatéral, O*ad* le sera aussi; par conséquent, *ad* est égal à *a*O qui a été pris égal à M. Donc d'abord *ad* = M. En second lieu, d'après ce qu'on vient de prouver, on a *ab* : AB :: *bc* : BC :: *cd* : CD, ou, puisque AB = *l*, BC = *k*, CD = *i*, *ab* : *l* :: *bc* : *k* :: *cd* : *i*. Donc enfin *ad* ou M est partagé en *b* et *c* proportionnellement à *l*, *k*, *i*.

PROPOSITION XIX.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée ab *construire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDE, *en prenant* ab *comme côté homologue d'un côté donné* AB.

De l'une des extrémités de AB menons des diagonales aux sommets opposés, afin de décomposer le polygone ABCDE en triangles. Cela posé, au point *a* de la droite *ab* on fera l'angle *bac* égal à BAC, et au point *b* l'angle *abc* égal à ABC; le triangle *abc* ainsi formé sera semblable à ABC (p. 16, r. 2). Ensuite au point *a* de *ac* on fera l'angle *dac* = DAC, au point *c* l'angle *acd* égal à ACD, d'où résultera le triangle *adc* semblable à ADC. Enfin au point *a* de *ad* on fera l'angle *ead* = EAD, au point *d* l'angle *eda* = EDA, ce qui donnera le triangle *eda* semblable à EDA. Le polygone *abcde* sera semblable à ABCDE : car ces deux Fig. 75.

polygones sont composés de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés (p. 15).

Remarque 1. Si au lieu de donner aux triangles *abc*, *acd*, *ade* une disposition semblable à celle des triangles ABC, ACD, ADE, on n'avait aucun égard à cette condition, on trouverait plus d'un polygone. Car d'abord au lieu de faire au point *a* de la droite *ac* l'angle *dac* = DAC, et au point *c* l'angle *acd* = ACD, supposons qu'on fasse au point *c* l'angle *acd'* = CAD et au point *a* l'angle *d'ac* = ACD; le triangle *acd'* sera semblable à ADC, et les deux quadrilatères ABCD, *abcd'*, quoique composés de triangles semblables, ne sont pas semblables, parce que ces triangles ne sont pas semblablement disposés. En second lieu, au lieu de prendre dans le nouveau triangle le côté *ac* comme homologue du côté AC du triangle ACD, on peut construire sur *ac* comme homologue de AD un triangle semblable à ACD, ce qui peut encore se faire de deux manières. Prenant de même *ac* comme homologue de CD, on aura encore deux triangles. On aura donc de la sorte 6 quadrilatères composés de triangles semblables à ceux dont se compose ABCD; encore a-t-on placé les triangles construits sur *ac*, de l'autre côté de cette ligne, par rapport à *abc*, comme ceux qui sont construits sur AC. Si on les plaçait aussi du même côté de *ac*, on aurait 12 quadrilatères. Enfin si l'on opère sur *ab* et sur *bc* comme on a fait sur *ac*, on trouvera encore 12 triangles *additifs* et 12 triangles *soustractifs*. On aura donc 18 quadrilatères composés de triangles additifs semblables à ceux dont se compose ABCD, et 18 autres composés de pareils triangles soustractifs. Faisons abstraction de ces derniers, et prenons l'un des quadrilatères de la première espèce, par exemple *abcd*, pour achever le pentagone. Sur chacun des 4 côtés de *abcd* on pourra placer six triangles additifs semblables à ADE, ce qui formera 24 pentagones composés de triangles semblables à ceux de ABCDE. Chacun des 18 quadrilatères en donnant autant, on aura en tout 18. 24 pentagones dont un seul a ses triangles disposés comme ABCDE; c'est celui-là seul qui est semblable à ce dernier. Si le polygone ABCDE avait *n* côtés, le nombre des polygones construits sur *ab* homologue de AB serait 18. 24. 30...... × (6*n* — 6).

Remarque 2. La définition des figures semblables fournit aussi un moyen de faire, sur une droite donnée de grandeur, un polygone semblable à un polygone donné.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Si du sommet de l'angle droit A *d'un triangle rectangle* ABC *on mène une perpendiculaire* AD *sur l'hypothénuse* BC : Fig. 76.

1° *Le triangle* ABC *sera décomposé en deux triangles semblables entre eux et au triangle total* ABC;

2° *Chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et le segment adjacent;*

3° *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux segments.*

En effet, 1° les triangles BAC, BAD sont rectangles, l'un en A, l'autre en D; ils ont l'angle B commun : donc le troisième angle C de l'un est égal au troisième angle BAD de l'autre, et les deux triangles sont semblables (p. 16, 3°). De même, les triangles ABC, ADC sont rectangles, ont l'angle C commun; par conséquent l'angle B du premier est égal à l'angle CAD du second, et les deux triangles sont semblables. Ainsi les trois triangles ABC, ADC, BAC sont semblables.

2° Les triangles ABC, ADC, étant semblables, auront les côtés homologues proportionnels (p. 14). Or, le côté BC du triangle BAC et le côté BA du triangle BAD sont opposés aux angles droits et sont, par conséquent, homologues (p. 16, r. 1). De même BA du triangle BAC est opposé à l'angle C, BD du triangle BDA l'est à l'angle BAD qui est égal à C; donc ces deux côtés sont homologues, et l'on a la proportion BC : BA :: BA : BD.

De même les triangles BAC, DAC donnent la proportion

BC : AC :: AC : CD.

Ainsi chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment adjacent.

3° Dans les triangles semblables BAD, DAC, les côtés BD, DA du premier sont homologues aux côtés DA, DC du second; car BD et DA, dans le premier, sont opposés aux angles BAD, B, et DA, DC du second le sont aux angles C, CAD respectivement égaux à ceux-là. Donc BD : DA :: DA : DC,

Et la perpendiculaire DA est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, DC de l'hypothénuse.

PROPOSITION XXI.

PROBLÈME.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes a, b *données de longueur.*

Sur une droite indéfinie BE prenez BD égal à *a* et DC
Fig. 77. égal à *b*. Sur BC comme diamètre décrivez une demi-circonférence; au point D élevez sur BC une perpendiculaire DA jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence en A : DA sera la moyenne proportionnelle demandée. Car si l'on tire AB, AC, l'angle BAC, inscrit dans un demi-cercle, est droit (l. 2, p. 22, c. 2); donc, dans le triangle rectangle BAC, la perpendiculaire DA est moyenne proportionnelle entre BD et DC (p. 20, 3°), c'est-à-dire entre *a* et *b*.

Remarque. Comme AB est aussi moyenne proportionnelle entre BC et BD (p. 20, 2°), on peut dire 1° *que la perpendiculaire* AD *abaissée d'un point de la circonférence sur un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, DC *de ce diamètre ;* 2° *que la corde* AB *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *et le segment adjacent* BD.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Les segments de deux cordes AB, CD, *qui se coupent dans le cercle, sont réciproquement proportionnels*, de sorte qu'on a AO : OC :: OD : OB. Fig. 78.

En effet, si l'on tire AD, BC, les deux triangles AOD, COB auront les angles en O égaux comme opposés au sommet; les angles D et B sont égaux comme ayant pour mesure la moitié du même arc AC (p. 5, c. 2); donc ces deux triangles sont semblables (p. 16, 3°), et les côtés homologues donnent la proportion demandée AO : OC :: OD : OB.

Corollaire 1. Réciproquement si l'on a la proportion AO : CO :: OD : OB, les 4 points A, B, C, D, seront sur une circonférence de cercle. En effet, par les trois points A, B, C, faisons passer une circonférence; si elle ne passait point par D, elle couperait la droite CD en un autre point D', et d'après ce qu'on vient de prouver on aurait AO : OC :: OD' :: OB; mais par hypothèse on a AO : OC :: OD : OB. Ces deux proportions prouvent que OD = OD', ce qui est impossible, à moins que le point D' ne se confonde avec D.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Si d'un point O *pris hors d'un cercle on mène deux sécantes, les segments comptés du point* O, *sont réciproquement proportionnels*, de sorte qu'on a OA : OC :: OD : OB. Fig. 79.

Car si l'on tire BC, AD, les triangles AOD, BOC auront l'angle O commun, l'angle D égal à B parce qu'ils ont pour mesure la moitié du même arc AC; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent OA : OC :: OD : OB.

Remarque 1. La réciproque est vraie et se démontre comme celle de la proposition 22.

Remarque 2. Les propositions 22 et 23 peuvent être toutes deux comprises dans l'énoncé suivant : *Toute circonférence qui rencontre deux droites concourantes, les coupe de façon que les segments de l'une des droites sont réciproquement proportionnels à ceux de l'autre, ces segments étant pris à partir du point de concours.*

Remarque 3. La proposition suivante peut être considérée comme un cas particulier de la 23[e], en supposant que sur l'une des sécantes les deux points d'intersection se réunissent en un seul, de façon qu'elle devienne tangente.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Fig. 80. *Si d'un même point O, pris hors d'un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente OA est moyenne proportionnelle entre les segments OB, OC de la sécante, tous ces segments étant comptés du point O.*

Tirez AB, AC : les deux triangles OAB, OAC auront l'angle O commun ; l'angle OAB du premier triangle étant formé par une tangente OA et une corde AB, a pour mesure la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés (p. 5, r. 2) ; l'angle C du second triangle a la même mesure. Donc ces deux triangles sont semblables et leurs côtés homologues donnent la proportion demandée OC : OA :: OA : OB.

Corollaire. Si l'on a la proportion OC : OA :: OA : OB, les points B et C étant d'ailleurs situés du même côté du point O, la circonférence menée par les trois points A, B, C, touchera la droite OA en A. Car si elle ne touchait pas OA, elle aurait avec OA un second point commun ; soit A′ ce point ; les droites OC, OA seraient des sécantes, et l'on aurait (p. 23) OC : OA :: OA′ : OB ; mais par hypothèse on a OC : OA :: OA : OB, et la comparaison de ces deux proportions exige qu'on ait OA′ = OA. Donc le point A′ se confond avec A, et la droite OA, ne pouvant avoir deux points communs avec la circonférence, est nécessairement une tangente.

PROPOSITION XXV.

PROBLÈME.

Diviser une droite AB *donnée de longueur en moyenne et extrême raison,* c'est-à-dire en deux segments tels que le plus grand soit moyen proportionnel entre le plus petit et la ligne entière. Fig. 81.

A l'une des extrémités B de AB élevez à cette droite une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; du point C comme centre, et du rayon CB décrivez une circonférence, joignez AC, et soit D le point où cette droite coupe la circonférence; prenez AF égal à AD, et la droite AB sera divisée au point F de la manière demandée.

En effet, AB, qui est perpendiculaire à l'extrémité B du rayon BC, est une tangente (l. 2, p. 6), et si l'on prolonge AC jusqu'à la circonférence en E, on aura, d'après la proposition précédente,

$$AE : AB :: AB : AD \text{ ou } : AF,$$

de là $AE - AB : AB :: AB - AF : AF.$

Mais AB, étant double de BC, sera égal à DE qui est aussi double de BC; donc AE — AB est la même chose que AE — DE ou AD ou AF; en second lieu AB — AF est la même chose que FB; donc la proportion précédente devient

$$AF : AB :: FB : AF, \text{ et, intervertissant,}$$

$$AB : AF :: AF : FB.$$

Ainsi le plus grand segment AF est moyen proportionnel entre le plus petit FB et la ligne entière AB.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÈME.

Fig. 82. *Si l'on divise le rayon* OA *d'un cercle en moyenne et extrême raison, le plus grand segment* OB *soustendra la dixième partie de la circonférence.*

Prenons la corde AC égale à BO. Puisque le rayon OA est divisé en moyenne et extrême raison en B, on a AO : BO :: BO : BA; remplaçant ici BO par son égal AC, on aura AO : AC :: AC : BA. Ainsi les côtés AO, AC du triangle OAC sont proportionnels aux côtés AC, AB du triangle ABC; de plus l'angle compris entre ces côtés est le même de part et d'autre; donc ces deux triangles sont semblables (p. 16, 2°), et ont les côtés proportionnels, de sorte qu'on peut écrire AO : AC :: CO : BC. Mais AO = CO, donc aussi BC = AC, et comme AC a été fait égal à BO, les deux triangles ABC, BOC sont isoscèles.

Cela posé, l'angle ABC, extérieur au triangle BOC, est égal à la somme des angles intérieurs opposés, en C et en O (l. 1, p. 20, r.); et comme le triangle BOC est isoscèle, l'angle en C est égal à O, et l'angle ABC est double de l'angle O. L'angle BAC est d'ailleurs égal à ABC; donc BAC $= 2 \times$ O, et son égal ACO aussi est $= 2 \times$ O. On en conclut que BAC + ACO + O $= 2 \times$ O $+ 2 \times$ O + O = 5 fois l'angle O, et puisque ces trois angles valent aussi ensemble 2 droits, l'angle O sera la cinquième partie de 2 droits, c'est-à-dire sera $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$ d'un droit, ou le dixième de 4 droits. Par conséquent l'arc AC sera le dixième de la circonférence (p. 5).

Corollaire. On saura donc diviser la circonférence en 10 parties égales. Soit pris l'arc AC = AC, l'arc CAC′ sera

le cinquième de la circonférence. En divisant l'arc AC en 2, 4, 8, etc., parties égales, on pourra diviser la circonférence en 5, 10, 20, 40, 80, etc., parties égales.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Le rayon soustend la sixième partie de la circonférence. Fig. 82.

Soit la corde DE égale au rayon, et soient menés les rayons OD, OE. Le triangle DOE est équilatéral; par conséquent il a ses trois angles égaux (l. 2, d. 9), et comme leur somme est égale à deux droits, chacun d'eux sera égal à $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$ d'un angle droit. Ainsi l'angle DOE sera aussi $\frac{4}{6}$ d'un droit ou $\frac{1}{6}$ de 4 droits. Donc l'arc DE est le sixième de la circonférence.

Corollaire 1. On saura donc diviser la circonférence en 6 parties égales; la somme de deux de ces parties sera $\frac{1}{3}$ de la circonférence; si, au contraire, on divise chaque sixième en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales, on divisera la circonférence en 12, 24, 48, 96, etc., parties égales.

Corollaire 2. Si l'on prend l'arc AC′ égal à $\frac{1}{10}$ et l'arc AF égal à $\frac{1}{6}$ de la circonférence, l'arc C′F sera $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$, de sorte qu'on saura aussi diviser la circonférence en 15, 30, 60, 120, etc., parties égales.

Remarque 1. Pour diviser la circonférence en 4 parties égales, on a déjà dit antérieurement qu'il suffit de tirer deux diamètres perpendiculaires entre eux, tels que AB, CD; ainsi on saura diviser la circonférence en 4, 8, 16, etc., parties égales. Fig. 83.

Remarque 2. Comme on sait diviser la circonférence en 3 parties égales, on sait aussi diviser la moitié, le quart, le huitième, etc.,

et tous leurs multiples en 3 parties égales, de sorte que k et n étant deux nombres entiers, et C la circonférence, l'expression générale de l'arc que l'on sait, d'après cela, diviser en 3 parties égales est $\frac{k.C}{2^n}$. On sait aussi diviser ce même arc en 5 parties égales. Enfin, comme on sait diviser la circonférence en 15 parties égales, on saura aussi : 1° diviser en 3 parties égales le 5e, le 10e, etc., et tous leurs multiples, c'est-à-dire l'arc $\frac{k.C}{5.2^n}$; 2° diviser en 5 parties égales le tiers, le 6e, le 12e, etc., et leurs multiples, c'est-à-dire l'arc $\frac{k.C}{3.2^n}$. Chacune de ces divisions se fait au moyen d'un nombre déterminé de lignes droites et d'arcs de cercle ; c'est ce qu'on appelle une *opération géométrique*, au contraire du *tâtonnement* qui consiste en essais successifs dont on ne peut fixer le nombre *à priori*.

Définition xii. Un polygone dont les côtés sont égaux entre eux, est dit *équilatéral*. On appelle polygone *équiangle* celui qui a les angles égaux entre eux.

Définition xiii. Un polygone qui est à la fois équilatéral et équiangle, est appelé *polygone régulier*. Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Définition xiv. Un polygone est dit *inscrit* à un cercle lorsqu'il a tous ses sommets sur la circonférence; le cercle est alors dit *circonscrit au polygone*.

Définition xv. Un polygone est dit *circonscrit* à un cercle lorsque tous ses côtés sont tangents à la circonférence, et ce cercle est dans ce cas dit *inscrit au polygone*.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Pour inscrire un polygone régulier dans une circonférence, il suffit de la diviser en parties égales et de tirer les cordes des arcs ainsi obtenus; et pour circonscrire un

polygone régulier, il suffit de mener des tangentes aux points où la circonférence est divisée en parties égales.

1° Soit la circonférence AO divisée en parties égales aux points A, E, C, F, etc.; soient joints ces points par les cordes AE, EC, etc.; je dis que le polygone AECF, etc., sera régulier. Car d'abord les arcs étant égaux, les cordes AE, EC, etc., sont égales, et le polygone est équilatéral. En second lieu l'angle AEC a pour mesure la moitié de l'arc CBDA, l'angle ECF a pour mesure la moitié de l'arc FGHE; mais ces deux arcs sont égaux comme composés d'un même nombre de parties égales; donc les angles sont aussi égaux; il en est de même de tous les autres angles du polygonal qui est, par conséquent, équiangle aussi bien qu'équilatéral. Donc il est régulier. Fig. 83.

2° Soient encore les arcs égaux AB, BC, etc.; aux points de division A, B, C... menons les tangentes GH, HI, etc.; le polygone GHIKLM sera régulier. Pour le prouver, joignez le centre O aux points de contact F, A, B; faites tourner le quadrilatère AOBH autour de AO; la droite AH prendra la direction de AG, puisque les angles en A sont droits (l. 2, p. 6); les angles AOB, AOF sont égaux comme interceptant les arcs égaux AB, AF (l. 2, p. 4); ainsi la droite OB tombera sur OF et le point B en F; comme d'ailleurs les angles en B et F sont droits, BH prendra la direction de FG, et les deux quadrilatères coïncideront. De là on conclura d'abord que l'angle H $=$ G, et comme on peut de même prouver que G $=$ M $=$ L $=$ etc., il s'ensuit que le polygone est équiangle. Ensuite l'égalité des mêmes quadrilatères montre que AH $=$ AG, c'est-à-dire que AH est la moitié de GH, et l'on prouve de même que BH est la moitié de HI. Or, je dis que AH $=$ BH. Car tirez OH; les deux triangles AOH, HOB ont le côté OH commun, le côté AO $=$ OB, et l'angle opposé au plus grand côté OH égal, comme droit de part et d'autre; donc ils sont égaux (l. 2, Fig. 84.

p. 19, c.), et AH = BH; par suite GH = HI, comme ayant leurs moitiés égales. Par la même raison HI = IK = etc. Donc le polygone est aussi équilatéral, et par suite il est régulier.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

A tout polygone régulier on peut circonscrire et inscrire un cercle.

Fig. 85. 1° Soient AB, BC, CD, etc., plusieurs côtés consécutifs d'un polygone régulier; par les trois sommets A, B, C faites passer une circonférence (l. 2, p. 13); je dis qu'elle passera aussi par le sommet D. En effet, soit O le centre de cette circonférence; tirez les rayons AO, BO, CO et joignez OD. Les deux triangles AOB, BOC seront égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, puisque AO, BO, CO sont des rayons d'un même cercle, et que AB = BC comme côtés d'un même polygone régulier; ces deux triangles étant d'ailleurs isoscèles, il s'ensuit que les 4 angles OAB, OBA, OBC, OCB sont égaux. Mais les angles ABC, BCD sont aussi égaux, puisque le polygone est régulier; si donc du premier on retranche OBA, et du second son égal OCB, les restes OBC, OCD seront égaux, et les deux triangles OBC, OCD auront un angle égal compris entre côtés égaux, savoir, l'angle OBC = OCD, le côté OC = OB comme rayons, le côté CB = CD comme côtés d'un polygone régulier. Donc aussi OD = OC, et le cercle décrit du point O avec le rayon OB passera aussi en D. On prouve de même qu'il passera par les autres sommets du polygone. Donc il sera circonscrit au polygone.

2° Par rapport au cercle circonscrit, les côtés du polygone sont des cordes égales; donc elles sont également éloignées du centre (l. 2, p. 4), de sorte que si du centre

on abaisse sur les côtés les perpendiculaires OG, OF, OI, etc., ces perpendiculaires sont égales, et le cercle décrit du point O avec le rayon OG passera par les extrémités G, F, I, etc., de ces perpendiculaires, points qui sont en même temps les milieux des cordes (l. 2, p. 3); de plus, ce cercle sera tangent, en ces points, à ces mêmes cordes (l. 2, p. 6). Donc il sera inscrit au polygone.

Remarque 1. Le centre commun du cercle circonscrit et du cercle inscrit est appelé *centre* du polygone. Les angles AOB, BOC, etc., tous égaux, se nomment *angles au centre*. On trouve l'angle au centre d'un polygone en divisant 4 droits ou 360° par le nombre des côtés du polygone.



Remarque 2. D'après les propositions 26, 27, 28 et leurs corollaires, on saura inscrire et circonscrire à toute circonférence, les 4 séries de polygones réguliers suivants :

1° Les polygones de 3, 6, 12, 24, 48, etc., côtés.
2° de 4, 8, 16, 32, 64, etc.
3° de 5, 10, 20, 40, 80, etc.
4° de 15, 30, 60, etc.

Remarque 3. On trouve l'angle d'un polygone régulier (non pas l'angle au centre) en divisant la somme des angles par le nombre des côtés. Si deux polygones réguliers ont même nombre de côtés, la somme des angles est la même (l. 1, p. 21); par conséquent, les angles sont égaux de part et d'autre. De plus, on peut dire que les côtés sont proportionnels; car si l'on forme une série de rapports dont les antécédents soient les côtés de l'un des polygones, et les conséquents ceux de l'autre, ces rapports seront égaux. Ainsi (p. 14) *deux polygones réguliers, qui ont même nombre de côtés, sont semblables.*

Soit n le nombre des côtés d'un polygone régulier; en prenant l'angle droit pour unité, on aura pour la somme des angles $2(n-2)$, et la valeur de chaque angle sera $\frac{2(n-2)}{n}=\frac{2n-4}{n}$.

Définition xvi. Le rayon du cercle circonscrit à un polygone régulier, est appelé *rayon* du polygone; celui du cercle inscrit est appelé *apothème* du polygone.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

Les contours ou périmètres de deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme les rayons, et comme les apothèmes.

Fig. 86. Les deux polygones ayant même nombre de côtés, l'angle au centre sera le même de part et d'autre (p. 29, r. 1). Plaçons l'un de ces angles dans l'autre; soit AB le côté de l'un des polygones, *ab* celui de l'autre, ACB l'angle au centre. Puisque les rayons AC, BC sont égaux, que les rayons *a*C, C*b* le sont, on peut écrire la proportion AC : *a*C :: BC : *b*C, d'où l'on conclut que *ab* est parallèle à AB (p. 7); si donc du point C on mène CD perpendiculaire à AB, les parallèles donnent la proportion (p. 7) AC : *a*C :: CD : C*d*; les triangles semblables (p. 16, 2°) ABC, *ab*C donnent aussi AC : *a*C :: AB : *ab*. D'un autre côté, nommant P, *p*, les périmètres des deux polygones, on a (p. 14, c. 2) P : *p* :: AB : *ab*; donc à cause des rapports communs, P : *p* :: AC : *a*C :: CD : C*d*,
mais AC, *a*C sont les rayons, CD, C*d* les apothèmes; donc etc.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

Tous les cercles sont des figures semblables, les centres sont des points homologues, et les rayons des dimensions homologues; réciproquement *toute figure semblable à un cercle est un cercle.*

Soient deux cercles extérieurs l'un à l'autre et de rayons différents; A, a, les centres. Tirons Aa, menons un rayon quelconque AB et le diamètre bb' parallèle à AB; joignez Bb, Bb', ces droites couperont la droite Aa en deux points O, O_1, qui seront des centres de similitude. En effet, quant au point O, les triangles ABO, abO ont les angles égaux et sont semblables (p. 16, 3°); ainsi on a $AB : ab :: AO : aO$. En outre joignez le point O à un point quelconque C pris sur la circonférence AB; cette droite OC coupera la circonférence ab en deux points, dont l'un, c, donnera la proportion $OC : Oc :: AB : ab$. Pour le prouver il suffit de montrer que les rayons AC, ac sont parallèles. Or, si ac n'était pas parallèle à AC, supposons que ac' le soit; tirez Cc' et prolongez-le jusqu'à la ligne des centres en O'. Les triangles semblables ACO', $ac'O'$ donneront Fig. 87.

$$AC : ac' :: AO' : aO',$$

d'où

$$AC - ac' : ac' :: AO' - aO' : aO'.$$

Mais la proportion $AB : ab :: AO : aO$ donne aussi

$$AB - ab : ab :: AO - aO : aO,$$

et comme $AO' - aO' = Aa$ de même que $AO - aO$, on conclut que $aO' = aO$, ce qui est impossible à moins que ac' ne se confonde avec ac. Donc ac est parallèle à AC, et l'on a $AC : ac :: CO : cO$, et puisque $AB : ab :: AO : aO$, on a

$$CO : cO :: AO : aO.$$

Donc à tout point C pris sur circonférence AB, répond sur circonférence ab, un point c tel que la droite Cc passe en O et y est coupée en deux segments dont le rapport est constant; donc les deux circonférences sont semblables et le point O est un centre de similitude (d. 6). On prouvera la même chose pour O_1. En outre, les triangles ABO, abO donnent

$$AO : aO :: BO : bO :: AB : ab,$$

donc les centres A, a sont des points homologues, et les rayons AB, ab des dimensions homologues (d. 7 et suiv.).

Réciproquement toute figure semblable à un cercle est un cercle. Fig. 88.
Car, soit un cercle OA; prenons le centre O pour centre de similitude, et après avoir tiré les rayons arbitraires OA, OB, OC, etc., prenons à volonté sur OA, ou sur son prolongement, le point a comme homologue de A; pour avoir les homologues b, c, etc., des points B, C...., il faut les déterminer par le moyen des proportions $OA : Oa :: OB : Ob :: OC : Oc$, etc.; or, comme $OA = OB = OC$, on aura aussi $Oa = Ob = Oc$. Donc les points a, b, c, etc., sont à égales distances du point O, et par suite, la figure abc, semblable à ABC, est une circonférence de cercle.

Corollaire. Les tangentes communes à deux cercles passent les unes au point O, les outres au point O_1. Car soit Dd une tangente commune; menons les rayons de contact AD, ad; ils seront per- Fig. 87.

pendiculaires à cette tangente, et par suite parallèles entre eux, ce qui montre que la droite D*d* passe en O. Les tangentes extérieures telles que D*d* passent donc au centre de similitude directe O, tandis que les tangentes intérieures comme E*e* passent au centre de similitude inverse O_1, comme on peut le démontrer. On reconnaîtra d'après cela qu'on ne peut jamais mener plus de 4 tangentes communes à deux cercles, et que pour les obtenir il suffit de mener des deux centres de similitude des tangentes à l'un des cercles. Si les cercles se touchent ou se coupent, il y a moins de 4 tangentes communes. Il peut même se faire qu'il n'y en ait aucune.

Remarque 1. Si deux cercles se touchent extérieurement, le point de contact est le centre de similitude inverse; s'ils se touchent intérieurement, le point de contact est le centre de similitude directe. Deux cercles concentriques ont leurs centres de similitude confondus avec le centre commun. Deux cercles égaux non concentriques, de même que deux polygones égaux non superposés, n'ont jamais de centre de similitude directe; les rayons vecteurs deviennent dans ce cas parallèles.

Fig. 88. *Remarque* 2. Deux arcs semblables AB, *ab*, répondent à des angles au centre égaux, et réciproquement.

Définition xvii. On entend par *ligne courbe* ou *contour convexe*, tout contour qui ne peut être coupé en plus de deux points par une droite indéfinie. La circonférence du cercle est une ligne convexe.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Toute ligne qui enveloppe un contour polygonal convexe est plus longue que la ligne enveloppée.

Fig. 89. Il y a deux cas : 1° Les deux lignes AGE, ABCDE se terminent à deux points communs A, E. Tirez AE, et prenant dans le contour intérieur le second côté à partir du point E, prolongez-le jusqu'au contour extérieur en I; prolongez de même les suivants, s'il y en a, y compris l'avant-

dernier BC qu'il faudra prolonger dans les deux sens. Cela fait on aura DE $<$ DI + IE.

CD + DI $<$ CH + HI.

FB + BC + CH $<$ FGH.

AB $<$ AF + FB.

Ajoutant toutes ces inégalités membre à membre et retranchant de part et d'autre les parties communes DI, CH, FB, on aura

Contour ABCDE $<$ AFGIE.

2° Les deux contours ABCDEA, IFGHI sont fermés sans avoir des points communs. Prolongez un côté AB du contour intérieur jusqu'à sa rencontre avec le contour extérieur en H et F. D'après le premier cas on aura Fig. 90.

AE + ED + DC + CB $<$ AH + HGF + FB.

D'ailleurs HF ou AB + AH + FB $<$ HIF;

ajoutant ces deux inégalités et retranchant de part et d'autre les parties communes AH, BF, on a

AE + ED + DC + CB + AB $<$ HGF + HIF,

ou contour ABCDEA $<$ HGFIH.

Remarque 1. Si le contour intérieur n'était pas convexe, on ne pourrait plus prouver qu'il est plus petit que l'autre.

Remarque 2. Ce théorème étant vrai quelque petits et nombreux que soient les côtés du polygone intérieur, on peut aussi l'admettre dans le cas où ce polygone serait remplacé par une courbe convexe.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

La différence entre une circonférence et le périmètre d'un polygone régulier à côtés infiniment petits, inscrit ou circonscrit, est infiniment petite.

Soit R le rayon du cercle; inscrivez-y un polygone régulier *infinitésimal* (c'est-à-dire à côtés infiniment petits); soit p le périmètre, r

ce périmètre est donc comprise entre ces deux-là, et puisque les circonférences sont proportionnelles à leurs rayons, on conclura que le rayon de cette troisième circonférence est compris entre les rayons des deux premières, c'est-à-dire entre le rayon et l'apothème du polygone.

Actuellement, prenons un carré dont le côté soit une Fig. 93. unité de longueur; le périmètre sera 4; cherchons le rayon de la circonférence *isopérimètre* (c'est-à-dire de même longueur). Le centre de ce carré est à l'intersection O de ses diagonales; le rayon sera donc AO, moitié de la diagonale, et l'apothème sera la perpendiculaire OI abaissée du centre O sur un côté AB. Or, OI est moitié de IH ou BC qui est 1; donc $OI = \frac{1}{2}$. Quant à AO, qui est un côté de l'angle droit du triangle rectangle AOB (l. 1, p. 23, r. 3°), il est moyen proportionnel entre AB et AI (p. 20, 2°); ainsi AO $= \sqrt{AB \times AI} = \sqrt{1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Le rayon du cercle isopérimètre avec le carré est donc compris entre $\frac{1}{2}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mais si dans les formules du problème précédent on remplace r par $\frac{1}{2}$ et R par $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura pour $r_{,}$ et $R_{,}$ l'apothème et le rayon de l'octogone régulier isopérimètre; $r_{,}$ et $R_{,}$ différeront moins que r et R, et le rayon de la circonférence est encore compris entre ces lignes $r_{,}$ et $R_{,}$. Au moyen de l'octogone, on trouvera le rayon et l'apothème du polygone régulier de 16 côtés; on continuera ainsi, et l'on trouvera que le rayon et l'apothème du polygone régulier de 16384 côtés sont tous les deux, jusqu'à la septième décimale, représentés par 0,6366196; par conséquent, le rayon de la circonférence isopérimètre, lequel est compris entre ces deux lignes, est aussi, au septième ordre près, égal à ce nombre. On divisera donc la circonférence 4 par le double de ce nombre, ou, ce qui revient au même, on divisera 2 par ce nombre 0,6366196, et l'on trouvera $\pi = 3,14159 +$ etc.

Trois questions se présentent ici : 1° pour avoir π avec une approximation déterminée, jusqu'à quelle approximation faut-il calculer le rayon du cercle, rayon que nous désignerons par ρ ; 2° combien faut-il calculer de rayons r_1, R_1, r_2, R_2, etc., pour avoir ρ avec cette approximation-là ; 3° enfin, avec quelle approximation faut-il en conséquence calculer les premiers rayons et apothèmes.

1° Soit a la valeur approchée de ρ, β la différence, on aura $\rho = a + \beta$.

La valeur exacte de π est $\frac{2}{\rho}$ ou $\frac{2}{a+\beta}$, celle que l'on calcule est $\frac{2}{a}$; l'erreur est donc $\frac{2}{a} - \frac{2}{a+\beta} = \frac{2\beta}{a(a+\beta)}$, quantité moindre que $\frac{2\beta}{a}$. Le premier apothème r est $\frac{1}{2}$ ou 0, 5, le quatrième, ainsi que tous les suivants, est plus grand que 0,636, comme le calcul le montre ; donc l'erreur est *à fortiori* moindre que $\frac{2\beta}{0,636^2}$, par conséquent moindre que 5β. Telle serait la limite de l'approximation si l'on prenait exactement $\frac{2}{a}$; mais on réduit cette quantité en décimales, et pour être certain du sens de l'approximation, on doit la calculer en plus, de même que $\frac{2}{a}$ est déjà approché en plus ; soit q le quotient de $\frac{2}{a}$ jusqu'à un certain ordre, β' la partie négligée, de sorte que $\frac{2}{a} = q - \beta'$; on a $\frac{2}{a} - \pi < 5\beta$

ou $\quad q - \beta' - \pi < 5\beta \quad$ et $q - \pi < 5\beta + \beta'$.

Si l'on calcule ρ à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$ de sorte que $\beta < \frac{1}{10^\gamma}$ il est inutile de pousser le cacul de q plus loin qu'à l'ordre γ. Admettons que β' soit aussi moindre que $\frac{1}{10^\gamma}$, il s'ensuit que $q - \pi$ sera $< \frac{6}{10^\gamma}$. Si avec cela le dernier chiffre de q est égal ou supérieur à 6, on pourra le supprimer, et on aura π à moins de $\frac{1}{10^{\gamma-1}}$; car si l'on a, par exemple, $q = 3,14159267$ à $\frac{6}{10^8}$ près, on aura $q - \pi < \frac{6}{10}$, $\pi > q - \frac{6}{10^8}$ ou $> 3,14159261$ et $\pi < 3,14159267$; ainsi *à fortiori* $\pi >$ 3,1415926 et $<$ 3,1415927 ; . . . donc les 7 premières décimales sont bonnes et le résultat est approché en moins. Mais si le dernier

chiffre était moindre que 6 on n'aurait que $\gamma-2$ bons chiffres. En effet, supposons que l'on ait $\gamma=9$ et $q=3{,}141592654$ il viendra $\pi<3{,}141592654$ et $\pi>3{,}141592645$; et tout ce qu'on peut conclure c'est $\pi<3{,}14159266$ et $>3{,}14159264$, ou en négligeant encore un chiffre $\pi<3{,}1415927$ et $>3{,}1415926$. Si donc on tient à ce que tous les chiffres conservés soient bons, on voit que ρ étant calculé à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$, π aura $\gamma-1$, ou, au moins, $\gamma-2$ bons chiffres, *sauf le cas* où le chiffre de rang γ étant <6, celui de rang $\gamma-2$ serait un zéro. Car si l'on a, je suppose, à $\frac{6}{10^5}$ près, un nombre $m<1{,}40034$, on aurait $m>1{,}39928$; on aurait bien $m>1{,}399$; mais on ne saurait conclure $m<1{,}400$. Dans ce cas il faut pousser le calcul au moins jusqu'au 3e chiffre à la suite du dernier zéro. Un premier point établi, c'est donc qu'en calculant ρ à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$ on est généralement certain d'avoir π avec $\gamma-2$ bons chiffres décimaux. Si l'on calcule le quotient $\frac{2}{a}$ en plus à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$, selon que le dernier chiffre sera ou ne sera pas plus grand que 5, on conservera, dans le premier cas, le chiffre de rang $\gamma-1$, et dans le second seulement celui de rang $\gamma-2$.

2° Reste à trouver ρ à moins de $\frac{1}{10^\gamma}$. Supposons que l'on prenne un apothème r_n tel que $\rho=r_n+\alpha$, α étant une petite fraction, et que l'on calcule r_n à moins d'une autre fraction α'; soit a la valeur calculée, de façon que $r_n=a+\alpha'$, d'où $\rho=a+\alpha+\alpha'$; il faudra que $\alpha+\alpha'$ soit moindre que $\frac{1}{10^\gamma}$, condition que l'on peut remplir de bien des manières. Pour rester dans les fractions décimales, on n'a qu'à supposer α, ainsi que α', $<\frac{5}{10^{\gamma+1}}$, et l'on aura $\alpha+\alpha'<\frac{1}{10^\gamma}$. Mais α, ou $\rho-r_n$ est $<R_n-r_n$, il suffit donc de poser d'abord $R_n-r_n<\frac{5}{10^{\gamma+1}}$, puis de calculer la valeur de r_n aussi à moins de $\frac{5}{10^{\gamma+1}}$. Or, $R_1-r_1<\frac{R-r}{4}$;

de même $R_2 - r_2 < \frac{R_1 - r_1}{4} < \frac{R-r}{4^2}$

et en général $R_n - r_n < \frac{R-r}{4^n}$.

Comme $R = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, et que $\sqrt{2} = 1,42$ — etc., on a $R - r < \frac{1}{2}(1,42 - 1) < 0,21$, et $R_n - r_n < \frac{0,21}{4^n}$.

On posera donc $\frac{0,21}{4^n} < \frac{5}{10^{\gamma+1}}$ ou $4^n > \frac{21}{5}10^{\gamma-1}$

puis $n > \frac{\gamma - 1 + \log 21 - \log 5}{\log 4}$, $n > \frac{\gamma - 0,375}{0,602}$.

Si l'on pose $\gamma - 2 = k$, on saura que pour avoir π avec k chiffres décimaux exacts, il suffit d'aller jusqu'à r_n, n étant déterminé par la formule $n > \frac{k + 1,725}{0,602}$.

On calculera la valeur de r_n à moins de $\frac{5}{10^{\gamma+1}} = \frac{5}{10^{k+3}}$ en moins.

3° Voyons enfin comment il faut calculer les premiers rayons pour avoir r_n à moins de $\frac{5}{10^{k+3}}$. Soient r_i, R_i deux de nos quantités calculées chacune à moins de $\frac{1}{10^{\delta}}$; soient b, B les valeurs en plus, e, E les erreurs ; on a donc $r_i = b - e$, $R_i = B - E$, de plus e et E, chacun, $< \frac{1}{10^{\delta}}$. Cherchons l'influence de ces erreurs sur les valeurs de r_{i+1}, R_{i+1}. On a $r_{i+1} = \frac{r_i + R_i}{2} = \frac{b+B}{2} - \frac{e+E}{2}$; l'erreur serait $\frac{e+E}{2}$; mais si le dernier chiffre de $b + B$ est impair, on aura une nouvelle erreur, inférieure à une demi-unité de l'ordre δ, et la limite totale sera $< \frac{e+E}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{10^{\delta}}$.

Représentons par c la valeur de r_{i+1} ainsi calculée, par e' l'erreur ; la valeur exacte de r_{i+1} serait $c - e'$, celle de $R_{i+1} = \sqrt{R_i \cdot r_{i+1}}$ serait $\sqrt{(B-E)(c-e')}$, tandis que l'on calculera à $\frac{1}{10^{\delta}}$ près la quantité $\sqrt{Bc}$. De là une erreur E', moindre que

$$\frac{1}{10^\delta} + \sqrt{Bc} - \sqrt{(B-E)(c-e')}$$

la partie irrationnelle se transforme en $\dfrac{Be'+cE-Ee'}{\sqrt{Bc}+\sqrt{(B-E)(c-e')}}$;
quantité moindre que $\dfrac{Be'+cE}{2\sqrt{R_i\, r_{i+1}}}$, de sorte qu'on a

$$e' < \frac{e+E}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^\delta};\quad E' < \frac{1}{10^\delta} + \frac{Be'+cE}{2\sqrt{R_i \,.\, r_{i+1}}},$$

ou, en supposant e, E, e', E' exprimés en unités décimales de l'ordre δ

$$e' < \frac{e+E+1}{2} \qquad E' < 1 + \frac{Be'+cE}{2\sqrt{R_i \,.\, r_{i+1}}}.$$

Or, en poussant le calcul jusqu'aux centièmes, on trouve

$r = 0{,}5$	$R > 0{,}70$ et $< 0{,}71$
$r_1 > 0{,}60$ et $< 0{,}61$	$R_1 < 0{,}65$ et $< 0{,}66$
$r_2 > 0{,}62$, $< 0{,}63$	$R_2 > 0{,}64$ et $< 0{,}65$.

Tous les rayons et apothèmes suivants sont compris entre 0,63 et 0,64. Nommons maintenant e_0, E_0, les erreurs sur r, R; e_1, E_1, les erreurs sur r_1, R_1, etc., erreurs prises en valeur absolue, et calculées en unités décimales de l'ordre δ, on trouvera, en mettant au dénominateur de E' les limites inférieures et au numérateur les limites supérieures, en place des quantités e, E, R, etc.

$$e_0 = 0 \qquad E_0 < 1$$

$$e_1 < \frac{1+1}{2} + 1 = 2 \qquad E_1 < \frac{71+61}{2\sqrt{60\times 70}} + 1 < 2{,}03$$

$$e_2 < \frac{1+2{,}03}{2} + \frac{1}{2} < 2{,}02;\ E_2 < \frac{66\times 2{,}02 + 63\times 2{,}03}{2\sqrt{63\times 62}} + 1 < 3{,}08$$

$$e_3 < 3{,}05 \qquad E_3 < \frac{65\times 3{,}05 + 64\times 3{,}08}{2\sqrt{64\times 63}} + 1 < 4{,}14$$

A partir d'ici on remplacera B et c par 0,64, R_i et r_{i+1} par 0,63, ce qui donne $E' < \dfrac{(e'+E)\,64}{126} + 1$ ou $< \dfrac{(e'+E)\,32}{63} + 1$; et l'on trouvera que ce n'est qu'à e_{10} et E_9 que les limites des erreurs surpassent 10 unités décimales de l'ordre δ, de sorte que e_9 et E_8 sont chacun plus petits que $\dfrac{10}{10^\delta}$. On trouve de même que e_{18}, E_{17}

sont moindres que $\frac{20}{10^{\delta}}$, et cette loi se soutiendra évidemment au delà, de sorte que e_{9d} sera moindre que $\frac{d}{10^{\delta-1}}$.

D'après cela une fois qu'on aura déterminé n par la formule donnée plus haut, $n > \frac{k+1,725}{0,602}$ ou $\frac{1000k+1725}{602}$, on examinera entre quels termes de la série 0, 9, 9×2, 9×3,.... tombe ce nombre n, c'est-à-dire qu'on prendra d de façon que $9\times d$ soit le terme de cette série, qui est égal ou immédiatement supérieur à n. Dès lors le premier rayon R étant calculé à moins de $\frac{1}{10^{\delta}}$, le 9[e] l'est à moins de $\frac{10}{10^{\delta}}$, le 18[e] à moins de $\frac{20}{10^{\delta}}$, le 27[e] à moins de $\frac{30}{10^{\delta}}$, le rayon de rang $9\times d$ l'est à moins de $\frac{10\,d}{10^{\delta}}$ ou de $\frac{d}{10^{\delta-1}}$; il en est de même de r_{9d} et de r_n. Mais r_n doit être calculé à moins de $\frac{5}{10^{k+3}}$; donc on posera $\frac{d}{10^{\delta-1}} \overset{=}{<} \frac{5}{10^{k+3}}$ ou $\frac{d}{5} \overset{=}{<} \frac{10^{\delta-1}}{10^{k+3}}$. Si d ne surpasse pas 5, on pourra faire $\delta-1=k+3$ ou $\delta=k+4$; si d ne surpasse pas 10, on fera $\delta-1=k+4$, ou $\delta=k+5$, etc.; et on n'oubliera pas que toutes les divisions par 2, toutes les extractions de racine carrée sont censées poussées jusqu'au chiffre de rang δ à droite de la virgule, chiffre qui est pris en plus.

Supposons qu'il s'agisse d'avoir π avec 8 décimales, on aura $k=8$, $n \overset{=}{<} \frac{9725}{602}$, ou $n=17$. On ira donc jusqu'à r_{17}, et comme 17 tombe entre 9 et 2.9, on fera $d=2$, $\delta=k+4=12$. On calculera donc tous les rayons et apothèmes avec 12 décimales; on prendra le quotient de 2 par la valeur de r_{17} jusqu'au 10[e] chiffre en plus, après avoir pris r_{17} en moins, et si dans ce quotient le 10[e] chiffre est >5, en le négligeant on aura π à moins de $\frac{1}{10^9}$, sinon on l'a à moins de $\frac{1}{10^8}$ en moins [1].

* *Définition XVIII.* Une droite qui coupe d'une manière quelconque d'autres droites est appelée *transversale* par rapport à ces droites.

[1] Voyez à la fin de l'ouvrage une note sur la racine carrée.

* PROPOSITION XXXVII.

THÉORÈME.

Fig. 94 et 95. *Toute transversale A′C′ qui rencontre les trois côtés d'un triangle, y détermine six segments tels que le produit de trois de ces segments, non consécutifs est égal au produit des trois autres, et l'on aura*

$$AC'.BA'.CB' = BC'.CA'.AB'.$$

Par le point A menez AD parallèle à BC jusqu'à la transversale en D. Les triangles semblables B′DA, B′A′C donnent

$$AB' : AD :: CB' : CA' \text{ d'où } AD \times CB' = CA' \times AB'.$$

Les triangles semblables ADC′, BC′A′ donnent aussi

$$AC' : BC' :: AD : BA', \text{ d'où } AC' \times BA' = AD \times BC'.$$

Multipliant cette égalité et la précédente membre à membre, et supprimant le facteur AD commun aux deux membres du résultat, on a $AC'.BA'.CB' = BC'.CA'.AB'$.

Corollaire. Réciproquement *si trois points pris en nombre pair sur les côtés d'un triangle et en nombre impair sur leurs prolongements déterminent sur ces mêmes côtés six segments, dont trois, non consécutifs, forment un produit égal à celui des trois autres, ces trois points sont en ligne droite.*

Supposons qu'on ait $AC'.BA'.CB' = BC'.CA'.AB'$. Si le point A′ n'est pas en ligne droite avec B′ et C′, supposons que A″ le soit. On aurait aussi $AC'.BA''.CB' = BC'.CA''.AB'$; divisant ces deux égalités membre à membre, on a $\frac{BA'}{BA''} = \frac{CA'}{CA''}$, égalité impossible.

* PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÈME.

Si trois figures inégales mais semblables ont leurs dimensions homologues parallèles et de même sens, les trois centres de similitude sont sur une ligne droite; il en est de même si l'une des figures a ses dimensions de sens contraire à celles des deux autres. Cette droite se nomme *l'axe de similitude directe* si les 3 centres sont des centres de similitude directe; dans le cas contraire on la nomme *axe de similitude inverse.*

Fig. 96. 1° Soient AB, A′B′, A″B″ trois dimensions homologues, parallèles et de même sens; si l'on joint AA′, BB′, l'intersection O″ de

ces droites sera un centre de similitude directe; on trouvera de même les deux autres O, O'. Les triangles semblables ABO'', A'B'O'' donnent la proportion

$$\frac{AO''}{A'O''} = \frac{AB}{A'B'}$$

de même AO'B, A''O'B'' donnent $\frac{A''O'}{AO'} = \frac{A''B''}{AB}$

enfin de A'OB', A''OB'', on tire $\frac{A'O}{A''O} = \frac{A'B'}{A''B''}$.

Si on multiplie ces 3 égalités membre à membre, le produit des seconds membres se réduit à 1, et l'on a

$$\frac{AO''}{A'O''} \cdot \frac{A''O'}{AO'} \cdot \frac{A'O}{A''O} = 1$$

$$\text{ou } AO''.A''O'.A'O = A'O''.AO'.A''O.$$

Ainsi, dans le triangle AA'A'', les 3 points O, O', O'', situés sur les prolongements des côtés, y déterminent six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. Donc O, O', O'' sont en ligne droite.

2° Dans le cas de la figure 97, O, O' sont des centres de similitude inverse situés par conséquent sur les côtés mêmes du triangle AA'A'', O'' est un centre de similitude directe situé sur le prolongement d'un côté. En raisonnant comme dans le premier cas, on prouvera que ces trois points sont en ligne droite.

Corollaire 1. Rien n'empêche de supposer que dans chacune des deux figures 96, 97, les trois points A, A', A'', sont les centres de trois cercles, et AB, A'B', A''B'', des rayons; par conséquent si l'on Fig. 98.
considère trois cercles inégaux avec leurs six centres de similitude O, O', O'', Q, Q', Q'', on reconnaîtra que les trois centres de similitude directe O, O', O'', sont en ligne droite, et que chacun de ces trois centres est en ligne droite avec deux centres de similitude inverse. Les trois cercles ont donc 4 axes de similitude, dont l'un OO'O'' se nomme l'axe de similitude directe, les trois autres sont appelés axes de similitude inverse.

Corollaire 2. Si un cercle en touche deux autres de la même manière, les deux points de contact sont des centres de similitude directs tous les deux, ou inverses tous les deux (p. 31, r. 1); ces deux points de contact sont donc en ligne droite avec le centre de similitude directe des deux cercles. De même si un cercle en touche deux autres de différentes manières, les points de contact sont en ligne droite avec le centre de similitude inverse.

Remarque. Trois polygones réguliers semblables qui ont leurs côtés en nombre pair, et sont placés de façon qu'ils aient les côtés parallèles, ont aussi quatre axes de similitude.



* PROPOSITION XXXIX.

THÉORÈME.

Fig. 99 et 100. *Les droites AO, BO, CO, qui joignent les trois sommets d'un triangle ABC à un même point O du plan de ce triangle, déterminent sur les côtés, ou sur leurs prolongements, six segments, dont trois, non consécutifs, forment un produit constant.*

En effet, dans le triangle AA'C la transversale BB' donne (p. 38)

$$AB'.\ CB.\ A'O = CB'.\ BA'.\ AO.$$

Dans le triangle AA'B la transversale CC' donne de même

$$CA'.\ BC'.\ AO = CB.\ AC'.\ A'O.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre et supprimant de part et d'autre les facteurs communs CB, A'O, AO, on a

$$AB'.\ CA'.\ BC' = CB'.\ BA'.\ AC'.$$

Corollaire 1. Réciproquement *Si trois points pris en nombre impair sur les côtés d'un triangle et en nombre pair sur leurs prolongements, y déterminent six segments qui jouissent de la propriété précédente, les droites qui joignent ces points aux sommets opposés se coupent toutes les trois en un même point.*

Cette réciproque se démontre à peu près comme celle de la Proposition 38, en supposant que la droite AA' ne passe pas à l'intersection des deux autres.

Fig. 101. *Corollaire* 2. *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent au même point.* Soient AA', BB', CC' ces trois hauteurs; les deux triangles rectangles ABA', BCC' ont l'angle en B commun, sont semblables et donnent

$$\frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC}$$

Les triangles BAB', CAC' donnent aussi

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{BA}$$

Enfin, les triangles ACA', BCB' donnent

$$\frac{CB'}{CA'} = \frac{CB}{AC}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{BA'}{BC'} \times \frac{AC'}{AB'} \times \frac{CB'}{CA'} = 1$$

$$\text{ou } BA' \times AC' \times CB' = BC' \times AB' \times CA'.$$

Comme d'ailleurs les trois points A', B', C' sont nécessairement en nombre impair sur les côtés et en nombre pair sur leurs prolongements, il s'ensuit que AA', BB', CC' se coupent en un point.

Corollaire 3. *Les 3 droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points où les côtés opposés sont touchés par l'un quelconque des 4 cercles tangents aux trois côtés, se coupent au même point* (l. 2, p. 21). Car, soient A', B', C' les points de contact de l'un de ces cercles; on aura (l. 2, p. 23, r. 1) BA' = BC', AC' = AB', CB' = CA', d'où BA'. AC'. CB' = BC . AB'. CA', ce qui prouve que les trois droites AA', BB', CC' se coupent en un point. Même raisonnement pour les trois autres cercles. Fig. 102.

* PROPOSITION XL.

THÉORÈME.

Si l'on mène à volonté une parallèle C'B' *à un côté* BC *d'un triangle* ABC, *et qu'on joigne les extrémités de ce côté aux points* C', B' *déterminés sur les côtés opposés ou sur leurs prolongements, les droites ainsi tracées se couperont sur celle qui joint le sommet* A *au milieu* A' *de ce même côté* BC. Fig. 103.

En effet, puisque B C' est parallèle à BC, on a

$$AB' : B'C :: AC' : C'B,$$

d'où $$AB' \times C'B = B'C \times AC'.$$

D'ailleurs $$CA' = BA'.$$

Multipliant, on a $AB' \times C'B \times CA' = B'C \times AC' \times BA'$.

Et, en vertu du cor. 1 de la prop. 39, les trois droites AA', BB', CC', se coupent en un point.

Corollaire 1. Si le point B' est pris au milieu de AC, le point C' sera aussi le milieu de AB, et par conséquent *les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, se coupent en un point.*

Corollaire 1. Pour mener par un point C' une parallèle CB, on peut prendre sur BC deux longueurs égales à volonté, BA' et A'C, joindre BC' et prendre sur cette droite un point arbitraire A qu'on joindra aux points A' et C; tirer CC' qui coupera AA' en un point O; si l'on tire BO et qu'on prolonge jusqu'à AC en B', la droite C'B' sera parallèle à CB. Car si on mène par C' une parallèle à BC, elle coupe AC en un point tel que la droite qui joint ce point au point B passe en O. Donc B'C' est cette parallèle.

Remarque. La prop. 40 peut être regardée comme comprise dans la suivante.

PROPOSITION XLI.

THÉORÈME.

Fig. 104. *Si d'un point* O *pris sur le plan d'un angle* BAC *on mène à volonté deux transversales* OC, OG, *qu'on joigne les points d'intersection de ces transversales et des côtés de l'angle par des droites* BG, FC *qui se couperont en un point* I, *le lieu du point* I *sera une droite qui passera au point* A ; *et toute droite menée par le point* O *sera divisée harmoniquement par les trois droites* BA, IA, CA, *ou par leurs prolongements.*

En effet, dans le triangle FAG, la transversale OC donne (p. 37) entre les six segments

$$AC \cdot GO \cdot FB = CG \cdot FO \cdot BA.$$

Dans le même triangle, les droites menées du point I aux trois sommets A, F, G, déterminent six segments, qui donnent (p. 39)

$$CG \cdot HF \cdot BA = AC \cdot GH \cdot FB.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs AC, FB, CG, BA, on a

$$GO \cdot HF = GH \cdot FO.$$

Ainsi la droite OG est divisée en F et H, de façon que le produit de la ligne entière par le segment moyen est égal au produit des segments extrêmes, ce qui forme la division harmonique (l. 3, p. 10, r.).

Cela posé, menons une troisième transversale OC′, joignons FC′, GB′, tirons AI′; on démontrera de même que la droite AI′ détermine sur FG un point qui fournit également avec G, F, O une proportion harmonique. Or, je dis que le point H est le seul qui, situé entre F et G, jouisse de cette propriété ; car si pour un autre point H′ on avait la même propriété

$$GO \cdot H'F = GH' \cdot FO;$$

en divisant cette égalité par la précédente, on aurait

$$\frac{H'F}{HF} = \frac{GH'}{GH}$$

égalité impossible, puisque $\frac{H'F}{HF}$ est < 1, tandis que $\frac{GH'}{GH} > 1$.

Il est donc prouvé que la droite AI′ passe en H ; donc les points I, I′, etc., sont sur une ligne droite qui passe en A.

Reste à vérifier la même propriété pour les prolongements de BA, CA. Or, soit une droite OL coupant ces prolongements; joignant MB′, LC′ qui se rencontrent en un point I″, on prouvera que la droite AI″ coupe harmoniquement OL en K et OC′ en H″; mais

AI prolongé coupe aussi OC′ de cette manière; donc AI′ est le prolongement de AI; donc les prolongements des droites BA, IA, CA coupent harmoniquement les transversales menées du point O. Il est évident que si l'on mène une nouvelle transversale OP sur ces prolongements, et qu'on tire NL, MP qui se coupent en I‴, il est évident, dis-je, que AI‴ coupera aussi OL harmoniquement, que AI″ passe ainsi en K et se confond avec AI ′. Donc, enfin tous les points I, I′, I″, I‴, etc., sont sur une seule et même droite.

En second lieu, on a prouvé que toute droite OP, OG, etc., menée du point O, est coupée harmoniquement par les trois droites OA, OI, OC prolongées indéfiniment.

* *Définition xix.* Le point O est nommé le *pôle* de la droite AI par rapport à l'angle BAC, et AI est appelée la *polaire* du point O par rapport au même angle.

* *Définition xx.* On appelle *faisceau harmonique* le système de 4 droites qui, partant d'un même point, divisent harmoniquement toute transversale qui les coupe.

* PROPOSITION XLII.

THÉORÈME.

La droite OA *qui joint le pôle* O *au sommet de l'angle, forme avec les deux côtés et la polaire un faisceau harmonique.* Fig. 104.

Il est prouvé que toute droite menée du pôle O, est divisée harmoniquement par les 4 rayons du faisceau; quant à une transversale quelconque *og*, on pourra lui mener, par le point O, une parallèle OG, et l'on aura à cause des parallèles (p. 18)

$$of : OF :: fh : FH :: hg : HG :: og : OG.$$

d'où $of . FH = OF . fh$ et $hg . OG = HG . og$.

multipliant, on a $of . hg . FH . OG = OF . HG . fh . og$.

Mais OG étant divisé harmoniquement, on a $FH . OG = OF . HG$; on peut donc supprimer ces deux produits, et l'on a $of . hg = fh . og$, ce qui montre que la droite *og* est divisée harmoniquement par les 4 rayons qui partent du point A.

Corollaire. Il suit des 2 théorèmes précédents que :

1° Chaque point de la droite indéfinie AO est un pôle de AI par rapport à l'angle BAC; car la polaire du point *o*, pris sur AO, doit diviser harmoniquement la droite *og*; elle se confond donc avec AH;

2° Chaque point de AI est le pôle de AO par rapport à l'angle BAC;

car d'un point I, pris sur AI, menons deux transversales BG, CF ; joignons les points où elles coupent les côtés de l'angle, par les droites CB, GF ; ces droites prolongées se couperont sur la polaire du point I (p. 41); donc AO est cette polaire ;

3° Chaque point de AC est le pôle de AB par rapport à l'angle OAI; car si d'un point G, pris sur AC, on mène une transversale GO, la polaire du point G doit couper GO harmoniquement entre H et O (p. 41); mais AB coupe OG de cette manière. Donc chaque point G de AC est le pôle de AB ;

4° Chaque point de AB est le pôle de AC, propriété que l'on prouvera comme on a fait pour les points de AI par rapport à AO.

Ainsi, parmi les 4 rayons d'un faisceau, si l'on en prend deux non consécutifs, chaque point de l'un de ces deux rayons est le pôle de l'autre par rapport à l'angle des deux autres rayons. Deux rayons non consécutifs ont reçu pour cette raison le nom de *rayons conjugués.*

Corollaire 2. Si on prolonge OA vers O', et que du point O' on mène une parallèle à OL, cette parallèle sera coupée par les trois rayons AB, AI, AC, comme OL l'est par leurs prolongements. Donc les 4 rayons AB, AI, AC, AO' forment un faisceau harmonique. Concluons donc que 3 rayons consécutifs et le prolongement du 4e forment un faisceau; que, par conséquent, en prolongeant les 4 rayons d'un faisceau, ce qui donne 8 rayons, on formera un faisceau chaque fois que parmi ces 8 rayons on en prendra 4 consécutifs, et comme on peut prendre chacun de ces 8 rayons à son tour pour le premier, il s'ensuit qu'on aura 8 faisceaux.

Corollaire 3. Les propositions 42 et 43 fournissent le moyen de résoudre avec le seul secours de la règle les questions suivantes :

1° *Étant donnés* 3 *rayons d'un faisceau, trouver le* 4e. Parmi les 3 rayons, il y en a deux qui sont conjugués; on cherche la polaire d'un point du 3e (p. 41) par rapport à l'angle de ces deux là, et l'on a le 4e.

2° *Étant donnés* 3 *points* G, H, F *d'un système harmonique, trouver* le 4e *point* O, *conjugué* de H. La figure 104 donne la solution.

3° *D'un point* I, *pris sur le plan de deux droites* BB', CC', *mener une droite qui aille passer au point d'intersection de* BB' et CC', *en supposant que ce point soit inconnu.* On cherche le point O, et au moyen de celui-ci, le point I', puis on tire la droite II'.



* PROPOSITION XLIII.

THÉORÈME.

Les deux extrémités d'un diamètre BD *d'un cercle étant regardés comme deux points conjugués d'un système harmonique* A, B, C, D, *les droites* MA, MC *qui joignent les deux autres points conjugués à un même point* M *de la circonférence, seront entre elles* :: AB : BC. Fig. 115.

Puisque A, B, C, D forment un système harmonique, on a

$$AD \times BC = AB \times CD,$$

ou $AD : CD :: AB : BC$, ou bien

$$AO + OD : OD + OC :: AO - OD : OD - OC.$$

Comparant la somme et la différence des antécédents à la somme et à la différence des conséquents, on a

$$2\,AO : 2\,OD :: 2\,OD : 2\,OC,$$

ou $AO \quad OD :: OD : OC,$

joignant MO, $AO : OM :: OM : OC.$

Ainsi les deux triangles AOM, COM ont un angle commun en O, compris entre côtés proportionnels et sont semblables; donc on aura aussi

$$AM : MC :: AO : OM :: OM : OC,$$

ou $:: AO - OM : OM - OC;$

c'est-à-dire $AM : MC :: AB : BC.$

PROPOSITION XLIV.

* THÉORÈME.

Si de chacun des points d'une droite AB *prise à volonte sur le plan d'un cercle, pourvu toutefois qu'elle ne passe pas au centre* O, *on mène deux tangentes* AD, AE : 1° *la sécante de contact* ED *coupera en un point invariable, le diamètre* FH *perpendiculaire à la droite* AB; Fig. 106. 2° *toute transversale menée par ce point invariable sera divisée harmoniquement par ce point, par la circonférence et par* AB.

1° Joignez AO qui sera perpendiculaire à la corde DE (l. 2, p. 23, r. 2); tirez aussi le rayon DO. Les triangles OAF, OCI ont l'angle O commun; ils sont de plus rectangles, et par conséquent, semblables; ainsi l'on a

$$OC : OA :: OI : OF, \text{ d'où } OF \times OC = OI \times OA.$$

Le triangle ODA, rectangle en A (l. 2, p. 6), donnera d'ailleurs (p. 20) $OI \times OA = \overline{OD}^2$; donc $OF \times OC = \overline{OD}^2$, d'où $OC = \frac{\overline{OD}^2}{OF}$.

Cette distance OC ne changera donc pas tant que le point A sera pris sur AB, puisque OF ne change pas, non plus que le rayon OD; donc toutes les sécantes, telles que ED, passeront au point C qu'on nomme le *pôle* de la droite AB, par rapport à la circonférence; AB est appelée la *polaire* du point C.

2° Soit menée par le pôle la droite AQ; je dis qu'on aura

AQ × MC = AM × CQ. Car de la relation $OC = \frac{\overline{OD}^2}{OF}$ on tire

$$OC : OD :: OD :: OF,$$

d'où $OD + OC . OD - OC :: OF + OD : OF - OD$

ou $CH : LC :: FH : FL,$

proportion qui prouve que FH est divisée harmoniquement en L et C; donc, joignant le point M au point F, on aura (p. 43)

$$MF : MC :: FL : LC.$$

Joignant aussi QF et QC, on aura de même

$$QF : QC :: FL : LC.$$

Ces deux proportions rapprochées donnent

$$MF : MC :: QF : QC;$$ proportion

qui montre (p. 10, 2°) que FC est la bissectrice de l'angle MFQ, et que FA, perpendiculaire à FC, est la bissectrice de l'angle MFQ', supplémentaire de MFQ; donc on aura (p. 10, r.) la proportion harmonique

$$AQ : AM :: CQ : MC.$$

Corollaire 1. Réciproquement, *si d'un point* C, *pris sur le plan d'un cercle, on mène une sécante quelconque* ED, *et qu'aux points* E, D, *où cette sécante coupe le cercle, on mène deux tangentes, le lieu de l'intersection* A *de ces tangentes sera une droite perpendiculaire au diamètre mené par le point* C. Car on trouvera comme ci-dessus

$OF \times OC = \overline{OD}^2$ ou $OF = \frac{\overline{OD}^2}{OC}$; donc le point F est invariable tant le point C ne change pas, et par suite, le point A reste sur la même droite AF perpendiculaire à OC.

Fig. 107. *Corollaire* 2. *Si le pôle* A *est hors du cercle, la polaire* PQ *coupe la circonférence en deux points* M, K, *et les droites* AM, AK *qui joignent ces deux points au pôle, sont tangentes à la circonférence.* Car d'après ce qu'on vient de montrer, le produit de AO par la distance du centre à la polaire est égal au carré du rayon; donc si AO est plus grand que le rayon, la distance de la polaire au centre est moindre que le rayon. Soit ON cette distance, la polaire sera une perpendiculaire élevée en N à AO, et si on joint MO, on a $NO \times AO = \overline{MO}^2$, ou NO : MO :: MO : AO, proportion qui prouve que dans les triangles MNO, MAO, l'angle commun en O est compris entre côtés pro-



portionnels; ces triangles sont donc semblables. Mais dans le triangle MNO, l'angle opposé à MO est droit; par conséquent dans le triangle AMO, l'angle AMO opposé à AO est droit aussi, et la droite MA, perpendiculaire à MO, est tangente. Il en est de même de AK.

* PROPOSITION XLV.

THÉORÈME.

D'un point A, *pris sur le plan d'un cercle, on mène deux transversales* AG, AH; *on joint deux à deux les points* I, F, G, H, *où ces transversales coupent la circonférence; les droites, ainsi obtenues, se coupent en deux points* L, P, *dont le lieu sera la polaire du point* A. Fig. 107.

Joignons PL qui sera la polaire du point A par rapport à l'angle FPG, et divisera harmoniquement la sécante AH (p. 41) au point B situé entre I et H; mais la polaire du point A par rapport à la circonférence, divise la sécante AH de la même manière, et passera par conséquent par ce même point B. Par une raison semblable, cette dernière polaire passera aussi au point C où AG est coupée par PL. Donc la polaire du point A, par rapport au cercle, passe en B et en C, et se confond avec PL.

Corollaire. On saura, d'après cela, mener la tangente au cercle par un point extérieur avec le seul secours de la ligne droite. Soit A ce point; on en cherchera la polaire PQ qui coupera la circonférence en deux points M, K; joignant ces points au point A, on a les tangentes cherchées AM, AK (p. 44, c. 2).

* PROPOSITION XLVI.

THÉORÈME.

Soit ABCD *un quadrilatère inscrit dans un cercle*, EFGH *le quadrilatère circonscrit ayant pour côtés les tangentes aux sommets du premier; si l'on prolonge les côtés opposés de chacun de ces quadrilatères, et qu'on mène les 4 diagonales :* Fig 108.

1° *Les points d'intersection* M, I, K, L, *des côtés opposés sont en ligne droite;*

2° *Les 4 diagonales* DB, AC, FH, EG *se coupent en un même point* O, *et chaque diagonale du quadrilatère circonscrit passe par le point d'intersection de deux côtés opposés du quadrilatère inscrit;*

3° *Enfin, partout où quatre droites de cette figure concourent au même point, elles forment un faisceau harmonique.*

1° Cherchons, par rapport au cercle, la polaire du point O où se coupent les diagonales du quadrilatère inscrit. A cet effet, on prendra les transversales BD, CA menées par ce point; on joindra deux à deux leurs points d'intersection A, B, C, D avec la circonférence; les droites AB, CD, AD, BC, qui les joignent, sont les côtés du quadrilatère inscrit, et déterminent par leurs intersections L, I, deux points de la polaire cherchée (p. 45). Mais la sécante AC passant au pôle O, les tangentes FK, EK, menées aux points où elle coupe la circonférence, se coupent également sur la polaire du point O (p. 44); il en est de même des tangentes en D et B. Donc les 4 points M, I, K, L se trouvent sur la polaire du point O, et sont en ligne droite.

2° Pour chercher la polaire du point L au moyen des sécantes LC, LB, il faudra joindre deux à deux les 4 points d'intersection de ces droites et de la circonférence, ce qui donnera les droites CA, DB qui se coupent en O, et les droites AD, BC qui se coupent en I, et ces points O, I seront sur la polaire du point L. Mais la sécante LC détermine les points D, C, et les tangentes en ces points se coupent en un point G, situé aussi sur la polaire du point I. Par une raison semblable, le point E, intersection des tangentes en A et B, est sur la polaire du point L. Donc les 4 points I, G, O, E sont en ligne droite, ou, ce qui revient au même, la diagonale GE du quadrilatère circonscrit passe au point O, intersection des diagonales du quadrilatère inscrit, et au point I, intersection des côtés opposés AD, BC de ce quadrilatère; ces côtés se distinguent en ce que chacun d'eux joint les points de contact A, D ou B, C de deux tangentes non adjacentes à une extrémité de la diagonale GE. En prenant le point I pour pôle, on reconnaîtra de même que les 4 points L, G, O, E sont en ligne droite.

3° Les 4 droites qui concourent en L, forment un faisceau harmonique. En effet, cherchant la polaire du point I par rapport à l'angle CLB, on trouvera qu'elle se confond avec LF (p. 41); donc (p. 42) les 4 droites dont il s'agit, forment un faisceau. De même EI est la polaire du point L par rapport à l'angle AIB, et par suite, les 4 droites qui concourent en I, forment un faisceau. Enfin, le faisceau harmonique L déterminant sur la transversale IB un système harmonique I, C, N, B, on en conclut que les 4 droites IO, CO, NO, BO, qui concourent en O, forment aussi un faisceau.

Remarque. La polaire d'un point I d'une droite IL, par rapport au cercle, passe par le pôle O de cette droite. Car si du point I on mène deux sécantes IB, IA, les tangentes en D, A, déterminent un point H de la polaire du point I; le point F est de même un point de

cette polaire ; et la droite IL a évidemment pour pôle le point O qui se trouve sur HF. Donc, si sur le plan d'un cercle on trace tant de droites qu'on voudra, et qu'on en prenne les pôles, autant il y aura de droites qui passeront en un même point, autant il y aura de pôles en ligne droite. Car si trois droites a, a', a'' se coupent en un point α, la polaire du point α passe par le pôle de la droite a, puisque le point α est sur a; de même, la polaire du point α passe par les pôles des droites a', a''. Donc ces trois pôles se trouvent sur la polaire du point α, c'est-à-dire sur une droite.



LIVRE IV.

RAPPORTS DES AIRES PLANES.

Comme deux plans coïncident lorsqu'ils ont trois points communs non en ligne droite (l. 1, p. 1), il s'ensuit que deux surfaces planes sont égales, lorsque leurs contours sont superposés.

Un parallélogramme peut se diviser en parties égales, par des droites parallèles à un côté. C'est ainsi que ABCD est
Fig. 109. divisé en sept parties égales, par des droites parallèles au côté AD. En répétant l'une de ces parties trois fois, on aurait donc les $\frac{3}{7}$ de la figure ABCD. Ainsi un parallélogramme peut être multiplié par un nombre commensurable quelconque.

On peut aussi concevoir le produit d'un parallélogramme P par un nombre incommensurable, par exemple par $\sqrt{2}$; car $\sqrt{2}$ est compris entre 1,41 et 1,42; si donc on multiplie le parallélogramme donné par ces deux nombres, on aura deux résultats, le premier plus petit que le second et dont la différence sera la centième partie du parallélogramme P. Mais $\sqrt{2}$ est aussi compris entre 1,4141356 et 1,4141357, et si l'on multiplie le parallélogramme donné par ces deux nombres, on aura deux résultats qui différeront moins que les précédents, entre lesquels ils sont compris. En continuant de considérer ainsi des nombres qui approchent de plus en plus de $\sqrt{2}$, les uns en moins, les autres en plus, on formera des surfaces qui différeront de moins en moins. Or, ce qu'on doit entendre par $P\sqrt{2}$, c'est la surface unique qui est la limite de toutes ces surfaces, quelque loin qu'on pousse le calcul de $\sqrt{2}$. Il y a des cas où cette surface limite peut se construire.

Cela posé, le rapport de deux parallélogrammes est un nombre abstrait tel, que le produit du second parallélogramme par ce nombre est égal au premier. On doit supposer, dans ce qui vient d'être dit, que les parallélogrammes que l'on compare ont les angles égaux chacun à chacun; mais il n'est pas nécessaire de leur supposer un côté commun, comme on a fait en prenant les $\frac{3}{7}$ du parallélogramme ABCD. Car si l'on partage AD en 4 parties égales et que, par les points de division, on mène des parallèles à AB, le parallélogramme ALMN sera tout aussi bien les $\frac{3}{7}$ de ABCD que AIKD, puisque AIKD et ALMN ont la partie commune AION, et les parties excédantes IOML d'un côté, DNOK de l'autre, sont composées elles-mêmes d'un même nombre de petits parallélogrammes égaux.

Définition I. Deux figures planes sont dites *équivalentes*, lorsqu'elles ont des surfaces égales, quoique non superposables. On vient d'en voir un exemple dans les parallélogrammes AIKD, ALMN.

Définition II. Le rapport des surfaces de deux figures est un nombre abstrait, tel que le produit de la seconde figure par ce nombre donne une figure égale ou équivalente à la première. Nous indiquerons le rapport de deux surfaces A, B par les notations connues A : B et $\frac{A}{B}$.

Pour appuyer cette définition, remarquez qu'on peut toujours concevoir un parallélogramme qui, ayant un angle donné, soit équivalent à une figure quelconque donnée. Car si l'on prend un parallélogramme dont l'angle et l'un des côtés sont quelconques et qu'on fasse varier le second côté d'une manière continue, le parallélogramme variera d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini. Il passera donc par tous les états de grandeur qu'une surface plane peut prendre; par conséquent, il prendra successivement des valeurs équivalentes à toutes les figures planes imaginables. Ainsi deux figures étant données, on peut les remplacer par deux parallélogrammes respectivement équivalents, ayant un angle commun. Or, il a été montré d'une manière nette comment on peut multiplier un

parallélogramme par un nombre abstrait; on concevra donc aussi ce qu'on entend par le rapport de deux surfaces planes quelconques.

Définition III. La *mesure* d'une surface est le rapport de cette surface à une autre prise pour *unité*. Cette mesure se nomme l'*aire* de la figure. L'objet principal de ce livre est de ramener la détermination du rapport des surfaces à des rapports de lignes, rapports dont les propriétés sont connues par le livre 3. Nous supposerons dorénavant les lignes rapportées à une unité, c'est-à-dire mesurées.

Fig. 110 et 111. *Définition IV.* La *hauteur* d'un triangle ABC est la perpendiculaire AD, menée du sommet A d'un des angles sur le côté opposé BC, prolongé s'il le faut. Ce point A s'appelle le *sommet* du triangle, et le côté BC, sur lequel tombe la perpendiculaire, se nomme la *base*. On peut prendre pour base tel côté qu'on veut; le sommet sera celui de l'angle opposé à ce côté.

Dans un triangle isoscèle, on prend ordinairement pour base le côté qui n'est pas égal aux autres.

Fig. 113. *Définition V.* La *hauteur* d'un parallélogramme est la perpendiculaire AE, menée entre deux côtés opposés pris pour *bases*.

Fig. 114. *Définition VI.* Un *trapèze* est un quadrilatère dans lequel deux côtés opposés AB, CD sont parallèles. Ces deux côtés parallèles sont appelés les bases du trapèze; la hauteur du trapèze est la perpendiculaire EF menée entre les bases.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Fig. 109. *Les surfaces de deux parallélogrammes* ABCD, EFGH, *qui ont les angles égaux chacun à chacun, sont entre elles comme les produits des côtés adjacents*, de sorte qu'on a

$$ABCD : EFGH :: AB \times AD : EF \times EH.$$

Supposons que les côtés AB, EF soient entre eux : : 7 : 5 et que AD : EH : : 4 : 3. Divisez AB en 7 parties égales, EF en contiendra 5; par les points de division menez des droites respectivement parallèles aux côtés AD, EH; ces droites décomposeront la première figure en 7 parties égales et la seconde en 5 parties égales entre elles, mais non égales à celles de la première. Divisez de même AD en 4 parties égales, EH en contiendra 3. Si, par les points de division, de AD on mène des parallèles au côté AB, chacune des 7 parties de ABCD se trouvera divisée en 4 parallélogrammes égaux, de sorte que ABCD se trouvera décomposé en 7×4 parties égales. Opérant de même sur EFGH, on décomposera cette figure en 5×3 parties égales à celles de ABCD; donc

$$ABCD : EFGH :: 7 \times 4 : 3 \times 5$$

Or, en multipliant terme à terme les proportions AB : EF : : 7 : 5, AD : EH : : 4 : 3, on a $AB \times AD : EF \times EH :: 7 \times 4 : 5 \times 3$, d'où, à cause du rapport commun :

$$ABCD : EFGH :: AB \times AD : EF \times EH.$$

[1] Supposons maintenant que AB, EF, étant commensurables entre eux, AD, EH ne le soient pas; comme le parallélogramme EFGH varie d'une manière continue avec EH, on conclura (l. 3, p. 4) que la proportion a encore lieu dans ce cas. Enfin, les côtés AD, EH, étant commensurables ou non, si AB, EF ne le sont pas, on prouvera de la même manière que la proportion n'en a pas moins lieu.

Corollaire 1. Supposons qu'il s'agisse de deux rectangles, que nous nommerons R, *r*; soient B, *b* leurs bases, H, *h* leurs hauteurs, qui, dans ce cas, sont les côtés adjacents aux bases. Puisque dans les rectangles les angles sont égaux comme droits, on aura $R : r :: B \times H : b \times h$, proportion qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{R}{r} = \frac{B \times H}{b \times h} = \frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$$

[1] Voyez une note à la fin de l'ouvrage.

Supposons maintenant que r soit un carré, de sorte que $h=b$, la proportion devient

$$\frac{R}{r}=\frac{B}{b}\times\frac{H}{b}$$

Si l'on prend r pour unité de surface, $\frac{R}{r}$ est la *mesure* de la surface du rectangle R (d. 3); si, de plus, on prend b pour unité de longueur, $\frac{B}{b}$, $\frac{H}{b}$ sont les mesures des côtés B, H du rectangle; par conséquent, en prenant pour unité de surface un carré, et pour unité de longueur le côté de ce carré, *la mesure de la surface d'un rectangle* ou *l'aire d'un rectangle est égale au produit de la base par la hauteur*. Représentant les trois rapports $\frac{R}{r}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{H}{b}$ par R', B', H', on peut écrire cette propriété ainsi :

$$R'=B'\times H'.$$

Ainsi, pour mesurer la surface d'un rectangle en mètres carrés, mesurez les côtés en mètres, et multipliez ces mesures l'une par l'autre, le produit sera l'aire du rectangle.

Dans tout le reste de cet ouvrage, l'expression *produit de lignes* doit être entendue comme on vient de l'expliquer.

Fig. 109. *Corollaire* 2. Tirez les diagonales DB, HF; chacun des deux parallélogrammes se trouvera décomposé en deux triangles égaux. *Ces deux triangles* ADB, HEF, *qui ont un angle égal* (A = E), *sont donc entre eux* comme les parallélogrammes, ou :: AD × AB : EH × EF, c'est-à-dire *comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal.*

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Pour le démontrer, je dis d'abord que deux parallélo-

grammes de même base et de même hauteur sont équivalents.

En effet, soient deux parallélogrammes ABCD, ABC'D', Fig. 112.
dont l'un peut être, si l'on veut, un rectangle; donnons-leur une base commune AB; puisque la hauteur est la même, les bases CD, C'D' seront sur une même parallèle à AB. Puisque ABCD est un parallélogramme, le côté AC est égal et parallèle à BD; de même AD' est égal et parallèle à BC'; donc les angles C'BD, D'AC sont égaux, à cause des côtés parallèles (l. 1, p. 17); par suite, les triangles D'AC, C'BD sont égaux, comme ayant un angle égal entre côtés égaux. Donc surf. ABDD' — D'AC = ABDD' — C'BD, ou

Surf. ABDC = surf. ABC'D'.

Cela posé, si ABC'D' est un rectangle, son aire est égale à AB × C'B; donc l'aire du parallélogramme ABDC est aussi égale à AB × C'B.

Corollaire. Deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. En effet, soient P, p les aires de deux parallélogrammes, B, b les bases, H, h les hauteurs. D'après ce qu'on vient de prouver, on a $P = B \times H$, $p = b \times h$, et par conséquent

$$P : p :: B \times H : b \times h.$$

Or, si l'on suppose les bases égales, B devient égal à b, et la proportion se réduit à $P : p :: H : h$.

Si, au contraire, on suppose les hauteurs égales, on aura $P : p :: B : b$.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Fig. 113. *L'aire d'un triangle* ABC *est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.*

D'un sommet A menez une droite AD égale et parallèle au côté opposé BC; joignez CD. La figure ABCD sera un parallélogramme (l. 1, p. 22), que la diagonale AC divise en deux triangles égaux. Ainsi le triangle ABC est la moitié de ce parallélogramme; or, si AE est la perpendiculaire menée du point A sur BC, l'aire du parallélogramme a pour mesure (p. 2) BC × AE; donc le triangle a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC × AE.

Corollaire 1. Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, puisque chaque triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

Corollaire 2. Tout polygone pouvant se décomposer en triangles, on saura calculer la surface d'un polygone quelconque.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Fig. 114. *L'aire d'un trapèze est égale à la hauteur* EF, *multipliée par la demi-somme des bases parallèles* AB, CD, *ou par la droite* GH *qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

Tirez une diagonale BD; le triangle DBC aura pour mesure sa base DC, multipliée par la moitié de sa hauteur; or, sa hauteur est égale à EF, et par suite sa mesure $\frac{1}{2}$ DC × EF.



Si dans le triangle ABD, on prend AB pour base, la hauteur est aussi égale à FE (d. 4), et ce triangle a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB × EF. Donc la somme des deux triangles DBC, ADB, c'est-à-dire le trapèze ABCD a pour mesure $\frac{1}{2}$ CD × EF + $\frac{1}{2}$ AB × EF ou $\frac{1}{2}$ (AB + CD) × EF.

En second lieu, si du point G, milieu de AD, on mène GH parallèle à AB et par suite à DC, on aura (l. 3, p. 7)

AG : GD :: BI : ID :: BH : HC,

et comme AG = GD, on a BI = ID, BH = HC, de sorte que le point H est le milieu de BC. Mais les triangles GDI, ADB sont semblables (p. 16; 3°) et donnent

AD : GD :: AB : GI,

et comme GD est la moitié de AD, GI sera la moitié de AB; par une raison analogue IH est la moitié de DC. Donc GI + IH ou GH est la moitié de la somme des bases AB + CD, et le trapèze aura pour mesure GH × EF.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

L'aire d'un polygone régulier est égale à son contour multiplié par la moitié de l'apothème. Fig. 115.

Soit ABCD, etc., un polygone régulier, O son centre, OG son apothème. Tirons les rayons AO, BO, etc., qui décomposeront le polygone en triangles égaux entre eux. Le triangle AOB a pour mesure $\frac{1}{2}$ GO × AB, et comme le polygone se compose de six triangles égaux à AOB, il aura pour mesure $\frac{1}{2}$ GO × 6AB ou la moitié de l'apothème multipliée par le contour 6 AB. On raisonnera de même dans tout autre cas.



PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

L'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.

Fig. 115. Si au lieu d'un polygone de 6 côtés, on circonscrit au cercle des polygones de 12, 24, 48, etc., côtés, chacun de ces polygones aura pour mesure son contour multiplié par la moitié de l'apothème GO; mais on finira par trouver des polygones qui diffèrent infiniment peu du cercle quant à leur contour et à leur surface. Considérant donc le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on conclura que l'aire du cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon.

Pour donner à cette conclusion toute la rigueur possible, inscrivons au cercle un polygone semblable à ABCD..., et supposons que les côtés de ces polygones soient infiniment petits, et respectivement parallèles. La différence entre les aires de ces polygones se compose d'une série de trapèzes tels que AB*ba*; l'aire de chacun de ces trapèzes est moindre que AB × G*g*, et leur somme sera moindre que (AB + BC + ...) × G*g*; or, le contour AB + BC + ... est une variable finie et décroissante, G*g* est infiniment petit (l. 3, p. 33); donc cette différence est infiniment petite. Par conséquent, l'aire du cercle diffère infiniment peu de chacun des polygones. Mais l'aire du polygone circonscrit = périm. ABCDEFA $\times \frac{1}{2}$GO; donc, négligeant les infiniment petits, on aura

Aire du cercle = circonférence $\times \frac{1}{2}$GO (l. 3, p. 1, r.).

Fig. 59. *Corollaire* 1. *Le secteur de cercle* ABC, c'est-à-dire la surface comprise entre un arc BC et les rayons AB, AC, menés à ses extrémités, *a pour mesure son arc* BC *multiplié par la moitié du rayon.* Pour le prouver on démontrera, par un raisonnement semblable à celui de la proposition 5, liv. 3, que deux secteurs de même rayon sont

entre eux comme leurs arcs, de sorte que le secteur est au cercle entier, comme l'arc de ce secteur est à la circonférence. On aura donc

Secteur ABC : *cercle* AB :: *arc* BC : *circonférence* AB.

Multipliant les deux derniers termes par $\frac{1}{2}$ AB, on a

Sect. ABC : *cercle* AB :: *arc* BC $\times \frac{1}{2}$ AB : *cir.* AB $\times \frac{1}{2}$ AB.

Or, on vient de prouver que le cercle AB est égal à la circonférence AB $\times \frac{1}{2}$ AB; donc *sect.* ABC $=$ *arc* BC $\times \frac{1}{2}$ AB.

Corollaire 2. Soit R le rayon d'un cercle, la circonférence sera (l. 3, p. 34, c.) $2\pi R$, et l'aire du cercle $2\pi R \times \frac{1}{2} R = 2.\frac{1}{2}\pi. R. R = \pi. R^2$. Ainsi l'aire du cercle est aussi égale à π multiplié par le carré du rayon.

Soit a l'angle d'un secteur, cet angle étant donné en degrés, minutes, etc.; l'arc de ce secteur sera à la circonférence comme l'angle a est à 4 angles droits ou à 360° (l. 3, p. 5, r. 1 et 2). Ainsi *arc* BC : *cir.* AB :: a : 360° Fig. 59.

d'où $\quad$ *arc* BC $= \frac{a \times cir.\ AB}{360^\circ} = \frac{a \times 2\pi R}{360^\circ}$; multipliant

par $\frac{1}{2}$ R, on a *secteur* $= \frac{a \times 2\pi R. \times \frac{1}{2} R}{360^\circ} = \frac{a\pi R^2}{360^\circ}$.

Corollaire 3. Voici quelques applications numériques de ce qui précède :

1° *Calculer l'aire d'un secteur de cercle dont l'angle est de* 48° + 54', *le rayon du cercle étant de* 1^{mètre}, 6. On a ici $a = 48^\circ + 54'$ et $R = 1,6$. On réduit les degrés en minutes, et l'on a $a = \frac{2934}{60} = \frac{489}{10} = 48,9$; prenant $\pi = 3,14159$, nous aurons

$$sect. = \frac{48,9 \times 3,14159 \times (1,6)^2}{360} = \frac{48,9 \times 3,14159 \times 2,56.}{360}$$



au 6e ordre près, et en moins, la surface du cercle est 4^{m^2},523893, quantité par conséquent trop petite, mais qui deviendrait trop grande si on l'augmentait d'une unité du 6e ordre décimal.

L'essai ci-dessus ne résout pas toujours la question. Lorsqu'il la laisse indécise, il faut pousser l'approximation plus loin. On en verra un exemple.

3° Calculer à un centimètre près le rayon d'un cercle dont la surface est de 12^{m^2}.

Soit r ce rayon ; on a $\pi r^2 = 12^{m^2}$ d'où $r^2 = \frac{12^{m^2}}{\pi}$

Pour que r soit exact à 0,01 près, il suffit que r^2 le soit à 0,0001. En effet, si la différence de deux nombres a et a' est α, de façon que $a = a' + \alpha$, on a

$$a^2 = a'^2 + 2\,a'\,\alpha + \alpha^2$$

$$\text{ou } a^2 - a'^2 = 2\,a'\,\alpha + \alpha^2$$

Ce qui signifie que la différence de leurs carrés est plus grande que α^2. Donc si la différence de deux carrés est α^2, celle des racines est $< \alpha$.

Cherchons donc jusqu'où il faut pousser l'approximation dans π pour avoir $\frac{12}{\pi}$ à moins de 0,0001. Soient k et $k + \alpha$ deux nombres qui comprennent entre eux la valeur exacte de π ; celle de $\frac{12}{\pi}$ sera comprise entre $\frac{12}{k}$ et $\frac{12}{k+\alpha}$, quantités dont la différence est

$$\frac{12}{k} - \frac{12}{k+\alpha} = \frac{12\,\alpha}{k(k+\alpha)}$$

valeur moindre que $\frac{12\,\alpha}{k^2}$, et comme on peut prendre $k > 3$, cette différence est *à fortiori* moindre que $\frac{12\,\alpha}{9}$ ou $\frac{4}{3}\alpha$. Pour que r^2 soit calculé à moins de 0,0001, il suffit que $\frac{4}{3}\alpha$ soit $<$ 0,0001, ou

$$\alpha < \frac{0{,}0003}{4} \text{ ou } 0{,}000075.$$

Ainsi, il suffit de prendre π à moins de 0,00001 ; comme π = 3,141592, on peut prendre 3,1416, et $\frac{12}{3{,}1416}$ diffère de r^2 de moins que 0,0001. Mais on ne prend pas exactement $\frac{12}{3{,}1416}$; on calcule cette fraction par approximation en décimales ; de là une nouvelle erreur. Pour être certain du sens de l'approximation, il faudra calculer la

fraction en moins, parce qu'elle est déjà elle-même prise en moins, vu que le dénominateur est pris en plus. Dans ce cas, si l'on va jusqu'au 4ᵉ ordre décimal, r^2 sera en erreur d'une quantité moindre que 2 unités décimales du 4ᵉ ordre; dans le cas actuel cela suffit; si cela n'était pas, on prendrait π de façon que $\frac{12}{\pi}$ fût exact jusqu'au 5ᵉ chiffre décimal; on calculerait le quotient également jusqu'au 5ᵉ chiffre, et l'erreur serait moindre que 2 unités du cinquième, *à fortiori*, moindre qu'une unité du 4ᵉ ordre.

Effectuant la division de 12 par 3,1416, on trouve 3,8197, de sorte que r^2 est compris entre ce nombre et 3,8199; la racine carrée de chacun de ces nombres tombe entre 1,95 et 1,96. Chacun de ces deux derniers exprime donc r à moins de 0,01.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Les aires des figures semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues. Fig. 116.

1° Soient deux triangles semblables ABC, ADE auxquels on a supposé un angle homologue commun en A; si l'on suppose de plus que l'angle égal à B soit l'angle ADE, le côté DE sera parallèle à BC. Menons AF perpendiculaire à BC et par suite à DE. A cause des parallèles on a

$$AF : AG :: AB : AD.$$

A cause de la similitude des triangles, on a aussi

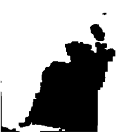
$$BC : DE :: AB : AD,$$

ou $$\tfrac{1}{2}BC : \tfrac{1}{2}DE :: AB : AD.$$

multipliant, on aura

$$\tfrac{1}{2}BC \times AF : \tfrac{1}{2}DE \times AG :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2.$$

Mais $\frac{1}{2}BC \times AF$ est l'aire du triangle ABC (p. 3), $\frac{1}{2}DE \times AG$ est celle du triangle ADE; donc les aires de ces triangles sont comme les carrés des côtés homologues.



AB, AD, ou comme les carrés de deux autres dimensions homologues (l. 3, p. 11, c. 2).

Fig. 75. 2° Soient maintenant deux polygones semblables. Décomposons-les en triangles semblables. Soient ABC, *abc* deux triangles semblables, de même ACD, *acd*, etc. D'après ce qu'on vient de prouver, on a

$$ABC : abc :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

$$ACD : acd :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2,$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$ABC : abc :: ACD : acd,$$

et, ce qui se démontre de même :: ADE : *ade*,

Donc la somme des antécédents, ou l'aire du premier polygone, est à la somme des conséquents, c'est-à-dire à l'aire du second, comme ABC : *abc* ou :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, etc.

3° Enfin, soient deux secteurs semblables, répondant, par conséquent, à des angles égaux : soit S l'aire de l'un des secteurs, R son rayon, *s* l'aire de l'autre, *r* son rayon, *a* l'angle commun. On a (p. 6, c. 2)

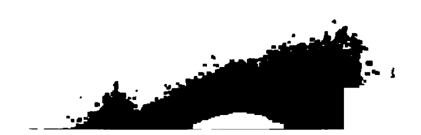
$$S = \frac{a\pi R^2}{360^\circ},\ s = \frac{a\pi r^2}{360^\circ}$$

$$\text{donc } S : s :: \frac{a\pi R^2}{360} : \frac{a\pi r^2}{360} \text{ ou } :: R^2 : r^2.$$

L'angle *a* peut être de 360°, et alors les secteurs se changent en des cercles entiers, on a $S = \pi R^2$, $s = \pi r^2$, et

$$S : s :: R^2 : r^2,$$

ce qui signifie que les aires des cercles sont comme les carrés des rayons, de même que les aires des secteurs semblables.



PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Le carré construit sur l'hypothénuse BC *d'un triangle rectangle* ABC, *est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés.*

Construisez des carrés sur les trois côtés et du sommet A de l'angle droit, menez AD perpendiculaire sur l'hypothénuse; les triangles BAD, DAC, BAC seront semblables (l. 3, p. 20); donc ils sont entre eux comme les carrés des côtés homologues, et l'on a Fig. 117.

$$\text{BAD} : \overline{\text{BA}}^2 :: \text{DAC} : \overline{\text{AC}}^2 :: \text{BAC} : \overline{\text{BC}}^2,$$

puis $\text{BAD} + \text{DAC} : \overline{\text{BA}}^2 + \overline{\text{AC}}^2 :: \text{BAC} : \overline{\text{BC}}^2.$

Or, BAD + DAC est égal au second antécédent BAC; donc aussi $\overline{\text{BA}}^2 + \overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{BC}}^2$.

On peut décomposer les 3 carrés en parties telles que celles qui résultent des carrés formés sur les côtés AB, AC, sont superposables avec celles qui résultent du carré de l'hypothénuse. Soient ACGF, ABDE les deux premiers carrés. Prolongez GF, DE jusqu'à leur rencontre en I; aux points B, C élevez sur l'hypothénuse les perpendiculaires BL, CH jusqu'à la rencontre de DI, GI en L, H; tirez L, H; je dis que BCHL sera un carré. En effet, dans les deux triangles DBL, BAC, le côté DB = BA, comme côtés d'un même carré; les angles BDL, BAC sont égaux comme droits; les angles *aigus* DBL, ABC sont égaux comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun (l. 1, p. 17); donc ces triangles sont égaux et le côté BL = BC. En comparant le triangle GCH à ABC, on prouvera de même que CH = BC. Les côtés BL, HC étant ainsi égaux et parallèles, LH et BC le seront aussi (l. 1, p. 22), et la figure LBCH aura ses 4 côtés égaux, les angles en B et C droits; donc l'angle H sera égal à LBC (l. 1, p. 17), et cette figure sera le carré construit sur l'hypothénuse BC. Fig. 118.

Cela posé, ce carré est décomposé en 3 parties : 1° Le quadrilatère ACHK qui lui est commun avec le carré ACGF; 2° le triangle ABC égal au triangle HCG qui fait encore partie de ce dernier carré. Ainsi la partie ACHK + ABC ou BCHK du carré de l'hypo-

thénuse est équivalente à la partie ACGHK du carré de AC; 3° le triangle LKB : or, je dis que ce triangle vaut le triangle FKH, partie restante du carré de AC, plus le carré de AB. En effet, si l'on prolonge DE et BC jusqu'à leur rencontre en M, le triangle BNA peut être remplacé par son égal BMD, puisque AB = DB, que les angles en A et D sont droits, et les angles NBA, DBM égaux comme angles aigus ayant les côtés perpendiculaires, et le carré ABDE sera transformé dans le quadrilatère équivalent BMEN. Ensuite le triangle FKH est égal au triangle ENL. Car LB = LH, BN = BM = LK; par suite LB — BN = LH — LK ou LN = KH; d'ailleurs, à cause des côtés perpendiculaires, les angles adjacents à ces côtés sont égaux chacun à chacun; donc le triangle HFK + le carré BADE équivalent ensemble au triangle LMB ou à son égal LKB.

Fig. 117. *Remarque.* On a prouvé (l. 3, p. 20) que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse et le segment adjacent, ce qui donne les proportions

$$BC : BA :: BA : BD$$
$$BC : AC :: AC : DC,$$

d'où $\overline{BA}^2 = BC \times BD \quad , \quad \overline{AC}^2 = BC \times DC.$

Or, si l'on prolonge la perpendiculaire AD jusqu'en E, on voit que BC × BD ou DE × BD est l'aire du rectangle BE, et que BC × DC ou DE × DC est l'aire du rectangle CE; donc

$$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = BE + CE \text{ ou } = \overline{BC}^2,$$

ce qui démontre encore le même théorème.

Corollaire 1. De ce que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, on conclut, en retranchant $\overline{AB}^2$ de part et d'autre, que $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$, c'est-à-dire que le *carré d'un des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypothénuse, moins le carré de l'autre côté.*

Corollaire 2. Les trois triangles semblables ABC, ADC, ABD ont déjà fourni les proportions

$$ABC : \overline{BC}^2 :: ADC : \overline{AC}^2 :: ABD : \overline{AB}^2$$

ou $$ABC : ADC : ABD :: \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2.$$

Mais ces trois triangles peuvent aussi être considérés comme ayant même hauteur AD, et sont, par conséquent, entre eux comme leurs bases (p. 3, c.); ainsi

$$ABC : ADC : ABD :: BC : DC : BD.$$

Donc, à cause des termes communs, on déduit

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : DC : BD;$$

Ce qui prouve 1° *que le carré de l'hypothénuse est au carré de chacun des côtés de l'angle droit,* AC ou AB, *comme l'hythénuse est au segment adjacent* DC ou BD; 2° *que les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments adjacents.*

Corollaire 3. *La diagonale* AC *d'un carré* ABCD *est au côté* AB *de ce carré, comme* $\sqrt{2} : 1$. Car le triangle rectangle ABC donne $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, d'où la proportion $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Extrayant la racine carrée, on a $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$. La diagonale est donc incommensurable avec le côté du carré, ce qu'on peut encore prouver de la manière suivante. Fig. 119.

Pour trouver la commune mesure de la diagonale et du côté, on porte le côté AB sur la diagonale (l. 3, p. 2); comme $AC > AB$, et que $AC < AB + BC$ ou $< 2\,AB$, il est clair que AB sera contenu dans AC une fois avec un reste FC. Comparons ce reste FC avec AB. Pour cela, du point A comme centre avec le rayon AB, décrivez un cercle et prolongez CA jusqu'à la circonférence en E. L'angle ABC étant droit, la droite CB est tangente au point B (l. 2, p. 6), et comme CE est une sécante, on aura (l. 3, p. 24)

$$EC : BC :: BC : FC.$$

Ainsi, au lieu de comparer FC à BC ou AB, on peut comparer AB à EC; AB sera contenu dans EC deux fois avec un reste FC qu'il faut de nouveau comparer à AB; donc l'opération ne se terminera pas et les lignes AC, AB n'ont pas de commune mesure.

Corollaire 4. *Le rayon d'un cercle est au côté du carré inscrit* :: $\sqrt{2} : 1$. Soit ACDB le carré inscrit; le triangle rectangle isoscèle AOC donnera aussi $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{AO}^2$, d'où $\overline{AC}^2 : \overline{AO}^2 :: 2 : 1$ et $AC : AO :: \sqrt{2} : 1$. Fig. 83.

Fig. 115. *Corollaire 5. Le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon du cercle* :: $\sqrt{3}$: 1. Soit *abc*... un hexagone régulier inscrit; *ac* sera le côté du triangle équilatéral inscrit, et si l'on tire les rayons *Oa*, *Ob*, *Oc*, puisque $ab = aO$ (l. 3, p. 27), la figure *abcO* est un lozange, dont les diagonales *Ob*, *ac* se coupent, par conséquent, à angle droit (l. 1, p. 23, r.). Ainsi dans le triangle rectangle *abk*, on a

$$\overline{ab}^2 = \overline{ak}^2 + \overline{bk}^2,$$

multipliant par 4.... $4\overline{ab}^2 = 4\overline{ak}^2 + 4\overline{bk}^2$.

Mais $4\overline{ak}^2$ est le carré de $2ak$ ou de ac; $4\overline{bk}^2$ est le carré de $2bk$ ou de bO, donc $4\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bO}^2$,

retranchant de part et d'autre $\overline{bO}^2$ ou $\overline{ab}^2$, il vient

$$3\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2,$$

d'où $\overline{ac}^2 : \overline{ab}^2 :: 3 : 1$ et $ac : ab :: \sqrt{3} : 1$; mais *ab* est égal au rayon, donc, etc.

Corollaire 6. Réciproquement, si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé au premier côté est droit. Soit un triangle ABC, rectangle en A; sur le côté AC, construisons
Fig. 120. deux triangles ACE, ACD, ayant le côté $AE = AB = AD$; et de plus, l'angle CAE aigu, et CAD obtus. Puisque ces trois triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que les angles compris sont tels que $CAE < CAB < CAD$, il s'ensuit (l. 1, p. 7) que le côté $CE < CB < CD$.

Or, $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$; donc $\overline{CE}^2 < \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$, ou bien $< \overline{CA}^2 + \overline{AE}^2$, tandis que $\overline{CD}^2 > \overline{CA}^2 + \overline{AD}^2$. Par conséquent, le carré du côté opposé à un angle aigu est plus petit que la somme des carrés des deux autres, et le carré du côté opposé à un angle obtus est plus grand. Ce n'est donc que dans le cas où l'angle est droit que le carré du côté opposé est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Fig. 121. DÉFINITION VII. *La projection* d'une ligne droite AB ou d'une courbe ACB sur une droite indéfinie EF est la dis-

tance EF comprise sur celle-ci entre les pieds des perpendiculaires AE, BF abaissées des extrémités A, B de celle-là.

Nota. Dans les deux propositions qui suivent, on se fonde sur ce que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Le carré du côté opposé à un angle aigu d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur celui-là.

Soit C un angle aigu du triangle ABC; du point A abaissons sur BC la perpendiculaire AD, et supposons qu'elle tombe dans le triangle. A cause du triangle rectangle ABD, on a (p. 8) Fig. 122.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2.$$

Mais $$BD = BC - DC,$$

d'où $$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2BC \times DC.$$

Remplaçant $\overline{BD}^2$ par cette valeur, on obtient

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC.$$

Mais $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, à cause du triangle rectangle ADC; donc

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times DC.$$

S'il s'agit du triangle AB'C, la perpendiculaire AD tombe au dehors. Mais on a encore

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{B'D}^2,$$

d'ailleurs de $B'D = DC - B'C$, on tire

$$\overline{B'D}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{B'C}^2 - 2DC \times B'C,$$

et par suite $\overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{B'C}^2 - 2DC \times B'C$, ce qui était à prouver.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Dans un triangle AB'C *qui renferme un angle obtus, le carré du côté opposé* AC *est égal à la somme des carrés des côtés qui compren-* Fig. 122.

ment cet angle, plus deux fois le produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur celui-là.

Du point A menez AD perpendiculaire sur B'C; cette droite tombera hors du triangle sur le prolongement de CB' vers B', et l'on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + (DB' + B'C)^2$$
$$= \overline{AD}^2 + \overline{DB'}^2 + \overline{B'C}^2 + 2DB' \times BC'$$
$$= \overline{AB'}^2 + \overline{B'C}^2 + 2DB' \times B'C.$$

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

Transformer un rectangle donné en un autre rectangle équivalent, dont la base est donnée.

Soient b, h les deux côtés du rectangle donné, B la base du rectangle cherché. On cherchera une quatrième proportionnelle aux trois lignes B, b, h (l. 3, p. 9); cette quatrième proportionnelle est la hauteur du rectangle cherché. Car on aura

$$B : b :: h : x,$$

d'où

$$b \times h = B \times x.$$

Or (p. 1, c. 1), $b \times h$ est l'aire du rectangle donné; $B \times x$ est celle du rectangle construit sur B et x; donc celui-ci est équivalent au premier.

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

Transformer un polygone donné en un triangle équivalent.

Fig. 123. Soit ABCDE le polygone. Tirez une diagonale DB qui sépare du polygone un triangle DBC; du point C menez CF parallèle à cette diagonale DB, jusqu'à la rencontre de AB prolongé en F, et joignez DF; le triangle DBF sera équi-

valent à DBC. Car ces deux triangles ont même base DB; de plus, leurs sommets C, F, étant sur une droite CF parallèle à la base DB, ces deux triangles auront aussi même hauteur. Donc (p. 3) ils sont équivalents, et sans changer l'aire du polygone donné, on peut remplacer le triangle DBC par DBF, ce qui transforme ABCDE en un polygone AFDE qui a un côté de moins. Si sur l'angle E on fait la même construction que sur C, on obtiendra le triangle GDF équivalent au polygone donné.

Il y a, en général, à faire autant de constructions que ce polygone a de sommets, moins trois.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

Transformer un polygone donné en un carré équivalent, c'est-à-dire carrer *un polygone.*

1° Si le polygone donné est un parallélogramme, on cherchera une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur; cette moyenne proportionnelle sera le côté du carré demandé. Car soient b, h la base et la hauteur, x la moyenne proportionnelle, on aura

$$b : x :: x : h, \text{ d'où } x^2 = b \times h.$$

Donc x^2, aire du carré fait sur x, est égal à $b \times h$, aire du parallélogramme.

2° Si le polygone donné est un triangle, le côté du carré sera une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur.

3° Si le polygone n'est ni un triangle, ni un parallélogramme, on le transforme en un triangle équivalent (p. 12), ce qui ramène au second cas.

Remarque. Carrer une figure, ou en opérer la *quadrature*, sont deux expressions synonymes. La quadrature du cercle aurait donc pour objet de trouver un carré équivalent à l'aire du cercle. A cet effet il faudrait chercher une moyenne proportionnelle entre la circonférence et la moitié du rayon. Il faudrait donc savoir construire une ligne droite égale à la circonférence, en supposant le rayon connu. Ce problème n'est pas encore résolu.

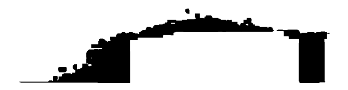
PROPOSITION XIV.

PROBLÈME.

Construire un rectangle connaissant l'aire, ainsi que la différence ou la somme des côtés adjacents.

Fig. 124. 1° On transformera l'aire donnée en un carré équivalent. Soit d'ailleurs CD la différence donnée; sur cette droite comme diamètre on décrira une circonférence; au point C on lui mènera une tangente CE égale au côté AB du carré; joignant le point E au centre O, on aura deux segments EG, EF qui seront les côtés du rectangle cherché. Car, en premier lieu, la différence de ces côtés est FG ou CD, qui est la différence donnée; en second lieu, à cause de la tangente EC et de la sécante EG, on a (l. 3, p. 24) GE : EC :: EC : EF, ou $GE \times FE = \overline{EC}^2$; ainsi l'aire du rectangle fait sur GE et FE, est égale à l'aire du carré fait sur EC, c'est-à-dire à l'aire donnée.

Fig. 125. 2° Soit DC la somme donnée; sur cette ligne, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence; au point C élevez sur CD une perpendiculaire CE égale au côté AB du carré: du point E menez à CD une parallèle EF qui coupera la circonférence en un point F; enfin, de ce point F menez FG perpendiculaire à CD, et CG, GD seront les côtés du rectangle cherché. Car la somme de ces côtés est égale à la ligne donnée CD; de plus, la perpendiculaire FG étant moyenne proportionnelle entre les segments CG, GD (l. 3,



p. 20), on a $GD : FG :: FG : GC$, d'où $GD \times GC = \overline{FG}^2 = \overline{EC}^2$. Donc l'aire du rectangle, fait sur GD et GC, est égale à l'aire du carré donné, fait sur EC.

Remarque. Si le carré avait son côté égal à la moitié de CD, en élevant CH perpendiculaire à CD et égale à ce côté, puis, menant du point H la droite HI, parallèle à CD, on obtiendrait un point I tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur CD, passerait au centre O, et on retrouverait CO et OD pour côtés du rectangle. Mais, si le côté du carré était plus grand que CO ou CH, la parallèle menée à CD, ne rencontrerait pas la circonférence, et le problème serait impossible. Et en effet, si l'on fait mouvoir le point G de C vers D, les côtés du rectangle passeront par tous les états de grandeur qu'ils peuvent avoir entre zéro et CD, et le côté du carré, équivalent au rectangle, ne surpassera jamais OI, qui est donc la plus grande valeur qu'il puisse avoir tant que la question est possible.

PROPOSITION XV.

PROBLÈME.

Construire une figure qui soit semblable à une figure donnée P, et qui ait une aire donnée Q.

Soit a une dimension de la figure P, x son homologue dans la figure inconnue que je représente par X. Les figures P et X, étant semblables, sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues (p. 7); ainsi

$$P : X :: a^2 : x^2.$$

Mais l'aire de X est égale à celle de Q, ce qui change cette proportion en

$$P : Q :: a^2 : x^2.$$

Cela posé, on carrera les figures P et Q; soient m, n

les côtés des carrés, de façon que $P = m^2$, $Q = n^2$; remplaçant P et Q par m^2 et n^2, on aura

$$m^2 : n^2 :: a^2 : x^2,$$

d'où
$$m : n :: a : x.$$

Ainsi on cherchera (l. 3, p. 9) une quatrième proportionnelle aux lignes m, n, a, et sur cette quatrième proportionnelle x, comme côté homologue de a, on construira une figure semblable à P (l. 3, p. 19); cette figure aura son aire égale à Q.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

Réduire une figure P *aux* $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire construire une figure semblable à la figure P, et qui soit à celle-ci comme 2 : 3.

Fig. 126. Sur une ligne indéfinie CE, portez 2 parties égales de grandeur arbitraire de C en F; à partir de F, prenez encore 3 de ces mêmes parties de F en D, et sur CD, comme diamètre, décrivez un demi-cercle; au point F, élevez à CD une perpendiculaire FG jusqu'à la circonférence en G; tirez les cordes GC, GD et prolongez-les indéfiniment. Comme ici la figure cherchée est représentée par 2 et la figure donnée par 3, on portera sur GD, côté qui a pour projection FD égal à 3 parties, on portera, dis-je, sur GD une distance GH égale à une dimension AB de la figure P; du point H on mènera HI, parallèle à DC, jusqu'à GC en I. Je dis que si sur GI, pris comme homologue de AB, on construit une figure semblable à P, elle sera égale à $\frac{2}{3}$ de P.

En effet, à cause des parallèles (l. 3, p 7), on a

$$GI : GH :: GC : GD,$$

d'où
$$\overline{GI}^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{GC}^2 : \overline{GD}^2.$$

Mais dans le triangle CGD rectangle (l. 2, p. 22, c. 2) en G, les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme leurs projections sur l'hypothénuse (p. 8, c. 2); ainsi

$$\overline{GC}^2 : \overline{GD}^2 :: CF : FD :: 2 : 3.$$

Rapprochant cette proportion de la précédente, on a

$$\overline{GI}^2 : \overline{GH}^2 :: 2 : 3.$$

Enfin, appelant X la figure construite sur GI, on aura (p. 7)

$$X : P :: \overline{GI}^2 : \overline{AB}^2 \text{ ou } \overline{GH}^2, \text{ et par suite}$$

$$X : P :: 2 : 3. \text{ Donc } X = \tfrac{2}{3}P.$$

Remarque. On peut demander que la figure cherchée soit à P comme une ligne est à une autre. Dans ce cas, on prend CF égal à la première de ces lignes, FD égal à la seconde, et le reste de la construction est le même.

PROPOSITION XVII.

PROBLÈME.

Étant données deux figures semblables ABC, *abc, en construire une troisième qui leur soit aussi semblable, et* Fig. 127.
qui, de plus, soit égale à leur somme ou à leur différence.

1° Si la figure cherchée doit être égale à la somme des deux figures données, on fera un angle droit sur les côtés duquel on prendra, à partir du sommet, les distances DF, DE respectivement égales à deux dimensions homologues AB, *ab* des deux figures données; on joindra EF, et sur cette ligne, comme dimension homologue à AB, on fera une figure EHF semblable à ABC; je dis qu'elle sera égale à ABC + *abc*. Car les figures ABC, *abc*, étant semblables, on a

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

d'où $$ABC + abc : ABC :: \overline{AB}^2 + \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Mais on a aussi $$EHF : ABC :: \overline{FE}^2 : \overline{AB}^2.$$

Or, à cause du triangle rectangle EDF, on a $\overline{FE}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{ab}^2$; ainsi, dans ces deux proportions, les trois derniers termes sont communs, et par suite $EHF = ABC + abc$.

2° Supposons qu'il s'agisse de construire une figure égale à la différence des figures ABC, *abc*. Sur un des côtés d'un angle droit, on prend DE égal à une dimension *ab* de la plus petite des deux figures; du point E comme centre, et d'un rayon égal à AB, homologue de *ab*, on décrit un arc de cercle qui coupe l'autre côté de l'angle droit en un point G; sur GD, comme homologue de AB, on fait une figure semblable à ABC, et cette figure GID sera égale à $ABC - abc$. Car de la proportion $ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$, on déduit

$$ABC - abc : ABC :: \overline{AB}^2 - \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Mais à cause du triangle rectangle GED, on a

$$\overline{AB}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{GE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{GD}^2.$$

Comparant donc cette proportion avec la suivante

$$GID : ABC :: \overline{GD}^2 :: \overline{AB}^2,$$ on aura

$$GID = ABC - abc.$$

Remarque. S'il s'agit de faire une figure semblable à ABC et ayant avec la somme $ABC + abc$ un rapport donné, on cherche d'abord la figure GHF égale à cette somme, ensuite, au moyen du problème précédent, on construit une figure qui soit semblable à GHF, et soit avec GDF dans le rapport donné.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Le lieu des points, de chacun desquels on peut mener des tangentes égales à deux cercles non concentriques, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Fig. 128.

Soient A, B les centres des deux cercles; soient deux tangentes CD, CE, et les rayons de contact AD, BE. Les triangles rectangles ADC, BCE donneront $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, $\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2$; par conséquent pour que les tangentes CD, CE soient égales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2,$$

ou (1) $$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BE}^2.$$

Mais si du point C on mène CF perpendiculaire à la ligne des centres AB, on a aussi

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2,$$

d'où $$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{BF}^2.$$

Comparant cette égalité avec (1), on en déduit

(2) $$\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BE}^2.$$

Mais en vertu d'un principe connu, on a

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

donc on a aussi $\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 = (AF + BF)(AF - BF) = \overline{AD}^2 - \overline{BE}^2.$

Or, de deux choses l'une, ou la perpendiculaire CF tombe entre les deux centres, comme sur la figure 128, ou elle tombe en dehors. Dans le premier cas, on a AF + BF = AB, et par suite, l'égalité ci-dessus donne $$AF - BF = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BE}^2}{AB}.$$

Connaissant ainsi la somme et la différence des deux distances AF, BF, on les déterminera, et l'on voit que ces distances ne dépendent que des deux rayons et de la distance des centres. Par conséquent, les perpendiculaires menées des différents points tels que le point C, tomberont au même point F; donc le lieu du point C est une perpendiculaire élevée en F à la ligne AB. Si la perpendiculaire CF tombe au dehors de AB, la relation (2) prouve que ce sera toujours

du côté du centre du plus petit cercle. Dans ce cas c'est la différence AF — BF qui sera égale à AB, et la conséquence est la même.

Si les cercles sont extérieurs l'un à l'autre, on a

$$AB > AD + BE,$$

d'où $$\overline{AB}^2 > \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + 2\,AD\,.\,BE$$

par conséquent $$\overline{AB}^2 > \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2,$$

et *à fortiori* $$\overline{AB}^2 > \overline{AD}^2 - \overline{BE}^2.$$

Si les cercles se coupent, mais que la corde commune passe entre la ligne des centres, on remarquera que dans le triangle qui a pour sommets les deux centres et l'un des points d'intersection, les angles dont les sommets sont ces mêmes centres, sont aigus; donc (p. 8, c. 6), le carré du plus grand rayon est moindre que le carré de la distance des centres plus le carré de l'autre rayon, c'est-à-dire que le carré de la distance des centres est encore plus grand que la différence $\overline{AD}^2 - \overline{BE}^2$. Donc dans ces cas

$$\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 < \overline{AB}^2,$$

et le point F tombe entre les centres; car pour un point F′ pris sur le prolongement de AB, on a

$$AF' = BF' + AB,$$

d'où $$\overline{AF'}^2 > \overline{BF'}^2 + \overline{AB}^2$$

et $$\overline{AB}^2 < \overline{AF'}^2 - \overline{BF'}^2.$$

Dans tout autre cas CF tombe hors des centres. Donc le lieu du point C est une droite unique perpendiculaire à la ligne des centres.

* *Définition VIII.* Cette droite a reçu le nom d'*axe radical.*

* PROPOSITION XIX.

PROBLÈME.

Construire l'axe radical de deux cercles.

Fig. 129. 1° Les deux cercles sont tangents. Dans ce cas l'axe radical est la tangente commune DE; car si d'un point quelconque E, pris sur cette tangente, on mène les tangentes EF, EG, on a (l. 2, p. 23, r. 1) EF = ED, ED = EG; donc FE = EG; donc les tangentes menées d'un point quelconque de DE sont égales. Il en est de même si les cercles se touchent intérieurement.

Fig. 130. 2° Les deux cercles se coupent; tirez la corde commune et prolongez-la indéfiniment, ce sera l'axe radical. En effet, soient menées les tangentes EF, EG, à partir d'un même point de DC; on aura (l. 3, p. 24)

$$\overline{FE}^2 = ED \times EC \quad , \quad \text{et } \overline{EG}^2 = ED \times EC,$$

d'où FE = EG; donc CD est l'axe radical.

3° Enfin, les deux cercles A, B n'ont aucun point commun. On les coupera tous les deux par un troisième cercle quelconque L. Soient G, H les points où ce cercle coupe le cercle A; I, K ceux où il rencontre le cercle B; tirez les sécantes GH, KI qui se couperont en un point O, si le centre L n'est pas situé sur AB. Du point O menez une perpendiculaire OC à la droite AB, et cette perpendiculaire sera l'axe radical. Car d'abord les deux droites GH, IK se couperont sur leurs prolongements, puisque les cercles A, B n'ont aucun point commun. Ensuite, si du point d'intersection O on mène les tangentes ON, OM, on a (l. 3, p. 24) Fig. 128.

d'un côté $\overline{ON}^2 = OG \times OH$,

de l'autre $\overline{OM}^2 = OI \times OK$.

Mais OG, OK étant des sécantes du cercle L, on a aussi (l. 3, p. 23)

$$OG \times OH = OI \times OK.$$

Donc $ON = OM$, et le point O appartient à l'axe radical; donc OF est cet axe.

* PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Si les centres de trois cercles ne sont pas en ligne droite, les axes radicaux de ces cercles, pris deux à deux, se coupent en un même point.

Il y a deux cas à considérer : 1° L'intersection de deux des axes radicaux n'est dans l'intérieur d'aucun des 3 cercles. Soient A, B, C les centres des 3 cercles; CQ, PQ deux axes radicaux qui se coupent au point Q. Si du point Q on mène des tangentes aux trois cercles, celles qui toucheront les cercles A, B seront égales, puisque le point Q est sur la droite CQ, axe radical de ces deux cercles. Par une raison semblable, les tangentes menées de ce même point Q aux cercles B, C, sont égales. Donc les tangentes menées du point Q aux cercles A, C sont égales, et le point Q appartient à l'axe radical de ces deux cercles (p. 18). Par conséquent ce troisième axe passe également au point Q. Fig. 128.

2° L'intersection de deux des axes est dans l'un des cercles A; par suite, ces deux axes DE, GI coupent ce cercle. Soit DE l'axe radical qui lui est commun avec le cercle B qui passera nécessairement aux points D, E. Soit F le point où cet axe est coupé par celui des cercles B, C. Ce point F, se trouvant sur la corde commune aux cercles A, B, est donc aussi dans le cercle B, par conséquent, ce second axe coupera le cercle B en deux points G, I, et le Fig. 131.

troisième cercle passant nécessairement par G et I, le point F est aussi dans l'intérieur du cercle C.

Mais les points G, I sont nécessairement situés, l'un dans le cercle A, l'autre au dehors, vu que la droite GI passe par un point de la corde ED commune à A et B; par conséquent, le cercle C coupera le cercle A aussi en deux points L, H, et je dis que la corde HL passera par le point F. Car si FH n'était pas le prolongement de FL, soit FH′ ce prolongement; supposons qu'il coupe le cercle A en H′, le cercle C en H″. A cause des cordes LH′, ED qui se coupent dans le cercle A, on aura (l. 3, p. 22)

$$FE \times FD = FL \times FH'.$$

De même, dans le cercle C, on a

$$FG \times FI = FL \times FH''.$$

Enfin, le cercle B donnant $FE \times FD = FG \times FI$,

on conclut $FL \times FH' = FL \times FH''$,

d'où $FH' = FH''$, ce qui est absurde; donc FH est le prolongement de FL, et l'axe radical des cercles A, C coupe les deux autres au même point F.

* *Définition IX.* L'intersection des 3 axes radicaux a reçu le nom de *centre radical.*

* PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Fig. 132. *Lorsqu'un cercle en touche deux autres de la même manière, pourvu que les points de contact ne soient pas sur la ligne des centres des cercles touchés, l'axe radical de ces deux-ci et la polaire de leur centre de similitude directe relativement à l'un de ces deux mêmes cercles, sont des lignes homologues, par rapport au point commun à ce dernier cercle et au cercle tangent. Si le contact a lieu de différentes manières, l'axe de similitude inverse remplace l'axe de similitude directe.*

Soient C, C′ les deux cercles touchés tous les deux extérieurement par le cercle C″ en H et G. Le point G sera le centre de similitude inverse des cercles C′, C″; le point H sera celui des cercles C et C″ (l. 3, p. 31, r. 1); donc si O est le centre de similitude directe des cercles C, C′, ces trois points H, G, O sont en ligne droite (l. 3, p. 38, c. 1). Joignez ces trois points : la droite OH coupera les cercles C, C′, en deux autres points K, I. Aux points H, I menez au cercle C les tangentes IF, HF qui se couperont en un point F, et comme la sécante IH est menée du point O, ce point F appartiendra à la polaire du point O par rapport au cercle C (l. 3, p. 44,

c. 1); cette polaire se confondra donc avec la perpendiculaire FL menée du point F sur le diamètre CO qui passe au pôle O (*ib*).

Cela posé, la tangente FH, commune aux deux cercles C, C'', est leur axe radical (p. 19). De même, si en G on mène la tangente GB commune aux cercles C', C'', elle sera leur axe radical ; par conséquent, le point B où ces deux axes se coupent est le centre radical des trois cercles (p. 20), et si de ce point B on mène AB perpendiculaire à la ligne des centres CC', cette droite BA sera l'axe radical des cercles C, C'.

Il s'agit donc de prouver que les droites FL, BA sont homologues par rapport au point H, centre de similitude des cercles C, C'; et comme ces droites sont parallèles, il suffit de prouver que les points F, B, où elles sont rencontrées par un même rayon vecteur FHB, sont homologues. Or, les points I, G, pris sur deux figures semblables, c'est-à-dire sur les cercles C, C'', et sur un même rayon vecteur sont homologues ; mais les centres C, C'' le sont aussi (l. 3, p. 31) ; donc les rayons CI, C''G sont parallèles (l. 3, p. 12), et les tangentes IF, GB, respectivement perpendiculaires à ces rayons, sont aussi parallèles. Donc les droites IF, BG, parallèles et menées par des points homologues, sont homologues, et les points F, B, où elles rencontrent le rayon vecteur FB, sont homologues. Par conséquent les parallèles FL, AB le sont. On raisonne de même dans tout autre cas.

Remarque. Si les deux cercles C, C' étaient égaux, leur centre de similitude directe O n'existerait plus ; la droite HG serait parallèle à la ligne des centres CC', et la droite FL passerait au centre C, sans cesser d'être homologue de l'axe radical AB.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Toutes les fois qu'un cercle C''' en touche trois autres C, C', C'' *de la même manière, le pôle de l'axe de similitude directe de ces trois cercles, pôle pris par rapport à l'un de ces cercles, est en ligne droite avec leur centre radical et avec le point où ce cercle est touché par* C'''. *Si le cercle* C''' *ne touche pas les trois autres de la même manière, l'axe de similitude directe est remplacé par un axe de similitude inverse passant par le centre de similitude directe des deux cercles qui sont touchés de la même manière par* C'''. Fig. 133.

Soit O le centre radical des cercles C, C', C''. Soit SS''S' l'axe de similitude directe de ces cercles (l. 3, p. 38) ; pour en déterminer le pôle par rapport au cercle C, on n'a qu'à mener de deux

points S′, S″ de cette ligne des tangentes à C; le point D, intersection des cordes de contact DE, DF, sera le pôle (l. 3, p. 44). Mais la corde DE est aussi la polaire du point S″ par rapport au cercle C (l. 3, p. 44, c. 2); si de plus on mène OA″, axe radical de C, C′, d'après la proposition précédente ces deux droites DE, OA″ seront homologues par rapport au point I où se touchent C et C‴. De même la corde DF et l'axe radical OA′ des cercles C, C″ sont homologues par rapport au point I. Donc D, intersection des deux cordes, et O, intersection des axes radicaux, sont homologues par rapport au point I, et les trois points D, I, O sont en ligne droite.

On prouvera de même pour les autres cas.

PROPOSITION XXIII.

PROBLÈME.

Fig. 133. *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés* C, C′, C″.

Cherchez l'axe de similitude directe SS′ des trois cercles et déterminez-en les pôles D, D′, D″ par rapport à chacun de ces trois cercles; soit d'ailleurs O leur centre radical; joignez-le aux trois pôles par les droites OD, OD′, OD″. Ces droites couperont les cercles correspondants en des points I, I′, I″ qui, d'après le théorème précédent, seront les points où les cercles donnés seront touchés par le cercle cherché. Ainsi les droites IC, I′C′, I″C″ prolongées se couperont en un point C‴ qui sera le centre de ce cercle cherché.

Il existe un cercle qui enveloppe les trois cercles donnés en les touchant. Pour le trouver prolongez ID jusqu'à sa seconde intersection avec le cercle C; faites de même de I′D′, I″D″ par rapport aux cercles C′, C″; les trois points ainsi déterminés seront ceux où le cercle enveloppant touchera C, C′, C″.

Outre les deux cercles tangents qu'on vient de déterminer et qui touchent chacun les trois cercles donnés de la même manière, il y a encore six cercles tangents. Il y en a un qui touche le cercle C extérieurement en enveloppant C′, C″; un autre touche C′, C″ extérieurement, tandis qu'il enveloppe C. Pour trouver ces deux cercles on remplace les deux centres de similitude S′, S″ par les centres de similitude inverse que fournit le cercle C comparé avec chacun des cercles C′, C″, et l'on opère comme ci-dessus.

Si dans ces dernières constructions on remplace le cercle C par C′ et réciproquement, on aura encore deux cercles tangents. Enfin on trouvera les deux derniers en remplaçant C par C″.

Remarque. Si les trois cercles donnés sont égaux, l'axe de similitude directe n'existe plus ; mais le centre radical est dans ce cas le centre commun des deux cercles qui touchent les trois cercles donnès de la même manière.

La construction ci-dessus, toute élégante qu'elle est, offre l'inconvénient d'être complétement en défaut lorsque les centres des trois cercles donnés sont en ligne droite : on y suppléera plus bas.

Cette même construction donne la solution des problèmes où il s'agit de déterminer un cercle par trois conditions qui consistent en ce que ce cercle doit toucher des cercles, toucher des droites ou passer par des points donnés. Il suffit pour cela de regarder une droite comme un cercle d'un rayon infini, et un point comme un cercle d'un rayon nul. Nous n'entrerons pas dans la longue discussion à laquelle cette manière de voir conduit. Voici des solutions directes pour quelques-uns des problèmes dont il s'agit.

PROPOSITION XXIV.

PROBLÈME.

Par deux points C′, C″ *faire passer un cercle tangent à un cercle donné* C. Fig. 134.

Par les points C′, C″ faites passer un cercle quelconque qui rencontre le cercle donné en deux points D, E; tirez la corde DE que vous prolongerez indéfiniment; tirez de même C′C″ : il y aura deux cas. 1° Si les droites DE, C′C″ se rencontrent, du point d'intersection A menez au cercle donné C les tangentes AF, AF′; soient F, F′, les points de contact. Par les trois points F, C′, C″ on fera passer un cercle ; je dis que ce cercle sera tangent au cercle donné C. Car à cause des sécantes AC″, AE, on a (l. 3, p. 23).

$$AD \times AE = AC'' \times AC';$$

d'un autre côté la tangente AF et la sécante AE, donnent (l. 3, p. 24)

$$AD \times AE = \overline{AF}^2$$

Comparant ces deux égalités, on en tire $AC'' \times AC' = \overline{AF}^2$. Ainsi AF est moyenne proportionnelle entre AC″ et AC′; par conséquent la circonférence menée par les trois points F, C″, C′, touchera la droite AF en F (l. 3, p. 24, c.); donc elle sera aussi tangente au cercle C en F. Il en de même du cercle déterminé par les trois points F′, C′, C″.

2° Si la droite DE est parallèle à C′C″, les points F, F′ seront sur une perpendiculaire à C′C″, menée du point C.

Pour démontrer la construction du cercle O, on remarquera d'abord que les quatre points D, D', C'', H sont sur une circonférence de cercle. Car les sécantes SA, SC'' dans le cercle A'AC'' donnent

$$SA : SC'' :: SH : SA'.$$

Mais si l'on joint D'A', les triangles rectangles semblables SA'D', SAD donnent $SA : SD' :: SD : SA'$.

De ces deux proportions on conclut que

$$SD' : SC'' :: SH : SD;$$

ce qui montre que, en effet, les quatre points D, C'', H, D' sont sur une circonférence. Cela posé, je dis que cette même circonférence touche le cercle donné C' au point D'. Car la tangente GD' et la sécante GA' par rapport au cercle C' donnent

$$\overline{GD'}^2 = GA' \times GF;$$

les deux sécantes GA' GC''; dans le cercle A'AC'' donnent aussi

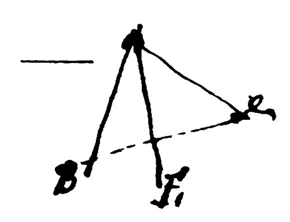
$$GA' \times GF = GC'' \times GH$$

d'où $\overline{GD'}^2 = GC'' \times GH,$

et de là on conclut que le cercle qui passe par les trois points C'', H, D', est tangent en D' : il a donc son centre quelque part sur C'D' prolongé. Reste à prouver qu'il est tangent en D à la droite CA. Or, si au point I, milieu de DD', on élève à DD' une perpendiculaire, le centre du cercle se trouvera en O, intersection de cette perpendiculaire avec C'D'. Ainsi, joignant OD, on aura un triangle isoscèle OD'D dans lequel l'angle ODD' sera égal à D'SA' parce que ces angles sont respectivement égaux aux angles opposés au sommet en D'. Donc OD est parallèle à SA, et par conséquent perpendiculaire à CD, et le cercle décrit du point O avec le rayon OD sera aussi tangent à CD en D.

Il y aurait sur cette construction différentes remarques à faire. On se bornera à faire observer qu'elle peut se déduire soit de la proposition 25, soit de la proposition 24.

Enfin, le nombre des solutions des problèmes sur le contact des cercles subit des réductions lorsque les données ont certaines positions particulières. Par exemple si trois cercles sont concentriques, il n'existe aucun cercle qui les touche tous les trois.



LIVRE V.

LES PLANS.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Par trois points A, B, C, *non en ligne droite, on peut faire passer un plan.* Fig. 138.

Tirez la droite indéfinie AB; dans un plan quelconque EF, tirez une droite quelconque, et prenez-y une distance A'B' égale à AB. Placez le point A' sur A et le point B' sur B, ce qui permet de donner au plan EF une infinité de positions autour de AB, puisqu'une droite peut tourner sur elle-même sans changer de position dans l'espace. On peut donc faire tourner ce plan autour de AB jusqu'à ce qu'il s'appuie sur le point C, et dès lors les trois points A, B, C sont dans ce plan.

Du reste, par les trois points A, B, C on ne peut faire passer qu'un seul plan. Car (l. 1, p. 1) deux plans se confondent s'ils ont de commun trois points non en ligne droite.

Corollaire 1. Deux droites AB, AC, qui se coupent, sont dans un même plan et déterminent ce plan. Car, si outre le point d'intersection A on prend un point B sur l'une des droites et un point C sur l'autre, ces trois points déterminent un plan qui contiendra les droites AB, AC, puisque chacune d'elles y a deux points (l. 1, d. 7).

Fig. 139. *Corollaire* 2. Deux parallèles déterminent un plan. Car elles sont dans un même plan (l. 1, d. 16); mais on ne saurait faire passer plus d'un plan par ces deux droites. Car on peut y prendre trois points A, B, C, non en ligne droite, et tout plan qui contient les deux parallèles contient aussi ces trois points.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Si deux plans se coupent, leur intersection est une ligne droite.

Fig 140. Je dis d'abord que cette intersection ne saurait se réduire à un point. Car soient CD, AB deux plans qui ont le point H commun. Par ce point H tirez dans le plan CD deux droites indéfinies KL, GI; si les deux portions de droite HK, HG sont d'un même côté du plan AB, les deux parties HL, HI seront de l'autre côté, de sorte que la droite KI, menée d'un point quelconque de HK à un point quelconque de HI, sera dans le plan CD, et percera le plan AB en un point M. Ce point M et le point H déterminent une droite HM qui aura deux points H, M dans chacun des deux plans AB, CD, et sera ainsi tout entière dans chacun de ces plans. L'intersection des deux plans comprend donc la droite HM; je dis de plus, que les deux plans ne sauraient avoir de commun que les points de cette droite indéfinie. Car s'ils avaient de commun un point situé hors de cette droite, ce point, avec les deux points H, M, formant un système de trois points non en ligne droite, les deux plans qui les contiendraient chacun, se confondraient en un seul et même plan (l. 1, p. 1).

Remarque. L'intersection d'un plan et d'une droite ne peut jamais se composer de plus d'un point; car si une



droite a deux points dans un plan, elle y est tout entière (l. 1, d. 7).

Définition I. Le point d'intersection d'une droite et d'un plan s'appelle le *pied* de la droite sur le plan.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Une droite AB *perpendiculaire à deux autres* BC, BD, *qui passent à son pied* B *dans un plan* GF *est perpendiculaire à toute autre droite* BE, *menée par ce pied* B *dans le même plan* GF. Fig. 141.

Puisque les droites BC, BE, BD sont dans un même plan GF, on peut mener une droite CD qui les coupe toutes les trois. Soient C, E, D les points d'intersection. Prolongez la droite AB vers A′, et après avoir pris les deux distances AB, A′B égales, mais arbitraires, joignez les points A et A′ à chacun des trois points D, E, C. La droite BD sera perpendiculaire au milieu de AA′; donc AD = A′D; par une raison semblable AC = A′C. Par conséquent, les deux triangles ACD, A′CD ont le côté CD commun, le côté AD = A′D, le côté AC = A′C, et sont égaux. Cela posé, faites tourner le triangle A′CD autour de CD pour le superposer avec ACD; le point A′ viendra se placer en A, et comme le point E ne change pas, la droite EA′ coïncidera avec EA. Donc ces deux distances sont égales; mais AB est aussi égal à A′B. Ainsi la droite BE a deux points B et E également distants des extrémités A et A′ de AA′; donc BE est perpendiculaire sur AA′, et réciproquement A′A′ ou AB, est perpendiculaire à BE.

Définition II. Une droite AB, perpendiculaire à toutes celles qui passent à son pied B dans un plan GF, est dite *perpendiculaire* à ce plan.

Remarque. Par un point B, pris dans un plan GF, on peut toujours élever une perpendiculaire à ce plan. En effet, dans un plan quelconque *abc* faites l'angle droit *abe;* dans un second plan, mené par *ab,* faites l'angle droit *abd*. Maintenant, dans le plan GF, faites au point B un angle CBD égal à *cbd,* et superposez l'angle *cbd* avec CBD; la droite *ab* sera perpendiculaire aux droites BC, BD, et par suite au plan GF.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Deux perpendiculaires à un même plan ne peuvent se couper ni dans le plan, ni hors du plan, et deux plans perpendiculaires à une même droite ne peuvent se couper ni sur la droite, ni hors de la droite.

1° Supposons que d'un point B pris sur un plan GF, on
Fig. 141. puisse élever à ce plan deux perpendiculaires BA, BH. Ces deux droites déterminent un plan (p. 1, c. 1) qui coupera le plan GF suivant une droite BC. Or AB, qui est par hypothèse perpendiculaire au plan GF, le sera à la droite BC qui passe par son pied dans le plan (d. 2); de même BH serait perpendiculaire à BC. Donc au même point B d'une droite BC, on pourrait, dans un plan qui contient BC, élever à cette droite deux perpendiculaires BA, BH, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que d'un point A, pris hors du plan GF, on puisse mener à ce plan deux perpendiculaires AB, AD; soient B, D leurs pieds, et soit tirée la droite BD. Si AB, AD sont perpendiculaires au plan GF, elles le seront à la droite BD (d. 2); donc le triangle ABD aurait deux angles droits, ce qui est impossible.

Fig. 142. 2° Si deux plans LF, DF, perpendiculaires à une même droite AB, pouvaient se couper en une droite CF qui ren-

contre AB en un point C, soit menée par ce point C et dans le plan DF, la droite CD différente de CF, et soit conduit un plan par AB et par CD. Ce plan coupera le plan LF suivant une droite CG, de sorte que les trois droites AB, CD, CG sont dans un même plan. Or, la droite AB, étant par hypothèse perpendiculaire au plan DF, le sera à la droite CD (d. 2); par une raison semblable AB sera perpendiculaire à CG; donc au point C de la droite AB on pourrait, dans le plan ACD, élever à cette droite deux perpendiculaires, ce qui est absurde.

Enfin, supposons que deux plans EG, CI, perpendiculaires à une droite AB, se coupent suivant une droite CH qui ne rencontre pas AB. Soient D, F les points où ces plans rencontrent la droite AB; joignez ces points à un point quelconque C de la droite CH. Puisque AB est perpendiculaire à chacun des plans CI, EG, elle l'est aux droites CF, CD qui partent du point C, ce qui est impossible. Fig. 143.

Corollaire. Toutes les perpendiculaires CD, CE, CF, élevées en un même point C sur une droite AB sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite. Car les deux droites CD, CE déterminent un plan perpendiculaire à AB, puisque AB est perpendiculaire aux deux droites DC, CE qui passent à son pied dans ce plan. De même, le plan des deux droites CE, CF est perpendiculaire à AB. Donc ces deux plans CED, CEF, perpendiculaires à la même droite AB au même point C, se confondent. Fig. 144.

Il suit de là que si l'on fait tourner l'angle droit ACD autour de son côté AC supposé immobile, le côté CD, qui ne cessera pas d'être perpendiculaire à AC, décrira le plan DCF perpendiculaire à AB.

Remarque. En un point C pris sur une droite AB, il est toujours possible d'élever un plan perpendiculaire à cette droite. Car il suffit d'y élever dans deux plans respectifs

ACD, ACE, menés par AC, les perpendiculaires CD, CE dont le plan sera le plan demandé. S'il s'agit de mener à AB un plan perpendiculaire par un point extérieur D, de ce point D on mène sur AB une perpendiculaire CD, et au point C on élève sur AB une seconde perpendiculaire CE dans un plan ACE, différent du plan ACD. Le plan DCE sera le plan demandé.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Fig. 145.

Si d'un point A, *pris hors d'un plan* EF, *on mène à ce plan une perpendiculaire* AB *et différentes obliques* AC, AC′, *etc., à différents points* C, C′... *du plan :*

1° *La perpendiculaire* AB *sera plus courte que toute oblique ;*

2° *Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus longue.*

Si l'on joint le pied B de la perpendiculaire aux pieds C, C′, C″... des obliques, rien n'empêche de faire tourner autour de AB les triangles rectangles ABC′, ABC″, etc., jusqu'à ce que leurs côtés BC′, BC″, etc., viennent se confondre avec la droite CD; les obliques et la perpendiculaire étant dès lors dans le même plan CAD, la question est ramenée à la proposition 12 du premier livre.

Remarque. Les pieds C, C′, C″... des obliques égales AC, AC′, AC″... étant également distants du pied B de la perpendiculaire, se trouvent sur une circonférence de cercle dont le centre est ce même point B.

Les droits AB, AC etc qui joignent un point A d'un plan DE, à différents points, B, C d'une perpendiculaire à ce plan, sont perpendiculaires à même droite menée dans le plan.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

D'un même point A, *pris hors d'un plan, soit menée sur un plan une perpendiculaire* AB *et une oblique* AC ; *si l'on joint les pieds de ces deux lignes par la droite* BC, *qu'au pied* C *de l'oblique on mène dans le plan* GH *une droite* EF *perpendiculaire à* BC, *je dis que* EF *sera aussi perpendiculaire à la droite* AC. Fig. 146.

Prenez EC = CF, joignez BE et BF qui seront égales comme obliques également éloignées de la perpendiculaire BC. Par conséquent si l'on tire AE, AF, ces deux droites seront aussi égales comme obliques également éloignées de la perpendiculaire AB (p. 5.) Donc la droite AC qui a deux points A, C, également éloignés de E et de F, est perpendiculaire à EF.

Corollaire. La droite EF perpendiculaire aux deux droites CB, CA, l'est par conséquent au plan CBA (p. 3).

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Si une droite AB *est perpendiculaire à un plan* GF, *toute droite* CD *parallèle à* AB, *est aussi perpendiculaire à ce plan ;* réciproquement, *deux droites perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.* Fig. 147.

Soient B, C les pieds des droites AB, CD sur le plan GF; tirez BC, et au point C menez dans le plan GF la droite CE perpendiculaire à BC. Si l'on joint le point C à un point quelconque A de la droite AB, le corollaire précédent prouve que EC est perpendiculaire au plan ACB. Or DC, qui est parallèle à AB, est dans le plan ACB ; donc EC est perpen-

diculaire à CD, et réciproquement CD est perpendiculaire à CE. Mais puisque AB est perpendiculaire au plan GF, elle l'est à BC; donc CD, qui est parallèle à AB, est aussi perpendiculaire à BC. La droite CD étant ainsi perpendiculaire à deux droites CB, CE menées par son pied dans le plan GF, l'est à ce plan (p. 3, d. 1).

Réciproquement, si les deux droites AB, CD sont perpendiculaires au plan GF, elles sont parallèles. Car si l'on tire BC, et qu'au point C dans le plan GF, on mène CE perpendiculaire à BC, qu'on joigne le point C à un point quelconque A de AB, la droite AC est perpendiculaire à CE; CB l'est aussi, ainsi que CD qui est perpendiculaire au plan GF. Donc les trois droites BC, AC, CD sont dans un même plan, comme étant perpendiculaires à une même droite en un même point (p. 4, e.). Mais puisque AB, CD sont dans un même plan et qu'elles ne peuvent se rencontrer comme étant perpendiculaires à un même plan (p. 4), elles sont parallèles.

Fig. 148. *Corollaire* 1. *Deux droites* A, B, *parallèles à une même troisième* C, *sont parallèles entre elles.* Menez un plan DE perpendiculaire à la droite C; puisque la ligne A est parallèle à C, d'après le théorème précédent A sera aussi perpendiculaire au plan DE; par la même raison B est aussi perpendiculaire au plan DE. Donc les deux droites A, B sont perpendiculaires au même plan DE, et sont par conséquent parallèles.

Fig. 147. *Corollaire* 2. D'un point D, pris hors d'un plan GF, on peut toujours mener une perpendiculaire à ce plan. En effet, élevez au plan GF, par un point quelconque B pris dans ce plan (p. 3, r.), une perpendiculaire AB; par AB et par le point D menez un plan, et du point D menez dans ce plan une droite DC parallèle à AB; cette droite DC sera, en vertu du théorème précédent, perpendiculaire au plan GF.

Définition 3. Une droite est dite *parallèle* à un plan lorsque, prolongée indéfiniment, elle ne peut le rencontrer; réciproquement, le plan est dit *parallèle* à la droite.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Si une droite AB *est parallèle à une autre* CD *située dans un plan* EF, *cette droite* AB *est parallèle au plan; réciproquement, si une droite est parallèle à un plan, elle l'est à toute droite située dans ce plan, pourvu que ces deux droites soient dans un même plan.*

1° Puisque les droites AB, CD sont parallèles, elles sont dans un même plan ABDC qui coupe le plan EF dans la droite CD; la droite AB ne peut pas sortir du plan ABCD; si donc elle pouvait couper le plan EF, ce ne pourrait être qu'en quelque point de l'intersection CD; mais elle est parallèle à CD; donc AB ne rencontrera pas le plan EF, et lui est parallèle. Fig. 149.

2° Réciproquement, supposons la droite AB parallèle au plan EF, et prenons dans le plan EF une droite CD, située avec AB dans un même plan ABCD. Puisque AB est parallèle au plan EF elle ne saurait rencontrer CD qui est dans ce plan. Donc les droites AB, CD, qui sont situées dans un même plan et ne se rencontrent pas, sont parallèles.

Corollaire 1. Si un plan EF est parallèle à une droite AB, et que par un point C pris dans ce plan on mène une parallèle à AB, cette parallèle est dans le plan EF. Car, sans cela, le plan ABC couperait le plan EF suivant une parallèle à AB, menée par le point C, de façon que par ce point C on pourrait, dans le plan ABC, mener deux parallèles à AB, ce qui est impossible.

Corollaire 2. *Une droite* AB, *parallèle à un plan* EF,

Tirez AC′ qui rencontrera le plan Q en un point E; menez BE, EB′, CC′ et AA′. Les droites BE, CC′ sont parallèles comme intersections du plan ACC′ par les plans parallèles Q, R (p. 9); donc on a (l. 3, p. 7)

AB : BC :: AE : EC′.

On a de même A′B′ : B′C′ :: AE : EC′,

d'où AB : BC :: A′B′ : B′C′.

Fig. 154. *Définition IV.* On appelle *angle dièdre* ou simplement *dièdre*, l'espace indéfini compris entre deux plans AD, AC, qui se coupent.

Les deux portions de plan AD, AC, limitées à l'intersection AB, mais indéfinies d'ailleurs, se nomment les *faces* de l'angle; AB est appelée l'*arète.* On désigne l'angle dièdre par quatre lettres dont la première est placée sur l'une des faces, les deux autres sur l'intersection, et la quatrième sur l'autre face. Ainsi l'angle des plans AD, AC, se nomme DABC. On peut aussi quelquefois désigner l'angle dièdre par deux lettres placées sur l'arète.

Pour se faire une idée nette de la grandeur relative des angles dièdres, on peut supposer que le plan AD, d'abord couché sur AC, tourne autour de la droite AB pour prendre successivement les positions AD, AE, AF, etc. A mesure que le plan mobile avance dans ce mouvement, l'angle dièdre qu'il fait avec AC, augmente, tandis que celui qu'il fait avec le plan AH, prolongement de AC, diminue. Lorsque l'on compare deux angles dièdres sous le rapport de leur grandeur, on fait abstraction de la figure de leurs faces, qu'on peut supposer indéfiniment prolongées d'un côté de l'arète; de sorte que l'égalité et l'inégalité de ces angles doit s'entendre comme dans les angles plans (l. 1).

Définition V. Un plan BF qui fait avec un autre plan

Fig. 155. HAC deux angles dièdres égaux FABC, FABH, est dit *perpendiculaire* à ce second plan HAC, et ces angles dièdres sont appelés *droits.*



Remarque 1. Tout plan AD, autre que BF, et que l'on conduirait suivant AB, ferait avec HAC deux angles dièdres inégaux DABC, DABH, de sorte que *par une droite* AB *prise dans un plan* HAC, *on ne saurait élever plus d'un plan perpendiculaire au premier.*

Remarque 2. On reconnaîtra facilement: 1° que les deux dièdres adjacents DABC, DABH, que forme le plan ABD avec le plan indéfini HAC, valent ensemble deux dièdres droits;

2° Que les dièdres consécutifs formés autour d'une même droite, prise pour arète commune, font ensemble quatre droits;

3° Que si deux plans indéfinis se coupent, les dièdres opposés sont égaux.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Si une droite CD *est perpendiculaire à un plan* PQ, *tout plan* AC, *conduit suivant cette droite* CD, *sera perpendiculaire au même plan* PQ. Fig. 156.

Soit AB l'intersection des deux plans. Concevons que le plan BC soit la réunion de deux plans superposés BC, BC', et que CD, C'D soient de même deux droites superposées. Au point D menez dans le plan PQ la droite EF perpendiculaire à AB; supposez maintenant que l'angle dièdre CBAQ tourne autour de AB, jusqu'à ce que la face BC coïncide avec BE; je dis que la face BQ viendra coïncider avec BC'. En effet, la droite DF est perpendiculaire à DB par construction; elle l'est à DC, puisque DC l'est au plan PQ; donc DF est perpendiculaire au plan BC (p. 3). Donc, lorsque le plan BC coïncidera avec BE, la droite DF, qui ne cesse pas de lui être perpendiculaire, le sera au plan BE et coïncidera avec DC' qui est censé rester fixe; par consé-

quent, le plan BDF coïncide avec BDC' ou BC', et l'angle dièdre FBDC avec C'ABE. Donc le plan AC fait avec PQ deux dièdres égaux; il est donc perpendiculaire à PQ.

Corollaire. Un plan PQ, perpendiculaire à une droite CD, l'est à tout plan AC, mené par cette droite.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Fig. 156. *Si deux plans* AC, PQ *sont perpendiculaires, et que dans le premier* AC *on mène une droite* DC *perpendiculaire à l'intersection* AB, *cette droite* AC *sera perpendiculaire à l'autre plan* PQ.

Considérons encore les deux droites superposées DC, DC'. Si au point D, pied de DC sur le plan PQ, on mène dans le plan PQ la droite EF perpendiculaire à AB, et qu'on fasse tourner le dièdre CBAQ autour de AB pour le faire coïncider avec son égal C'BAP, le plan BF viendra coïncider avec le plan BC'; et comme les angles BDF, BDC' sont droits, la droite DF coïncidera avec DC'; mais tandis que le plan BC coïncide avec BE, la droite CD se superpose avec DE, à cause des angles droits CDB, EDB. Donc l'angle CDF coïncide avec C'DE; par conséquent, ces deux angles sont égaux et droits. Ainsi la droite CD est perpendiculaire à la fois aux deux droites DF, DB; donc elle l'est au plan BF ou PQ que ces deux droites déterminent.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Fig. 156. *Si deux plans* AC, PQ *sont perpendiculaires, et qu'en un point* D *de l'intersection* AB, *on élève au plan* PQ *une perpendiculaire* DC', *cette perpendiculaire sera dans le plan* AC.

Car, si par cette perpendiculaire DC′ et par AB, on mène un plan C′B, ce plan est perpendiculaire au plan PQ (p. 15); mais le plan AC est déjà perpendiculaire au plan PQ, et il passe également par AB; d'ailleurs, par AB on ne peut élever au plan PQ qu'un seul plan perpendiculaire (d. 5, r.). Donc ce plan C′B coïncide avec le plan AC, et la droite C′D, qui se trouve dans le plan C′DB, est aussi dans le plan AC.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Toutes les fois que deux plans AD, AC, *perpendiculaires à un même troisième plan* FG *se coupent, leur intersection* AB *est aussi perpendiculaire à ce troisième plan* FG. Fig. 157.

Car si au point B on élève une perpendiculaire au plan FG, comme ce point B appartient à la fois aux deux intersections BC, BD, cette perpendiculaire se trouvera à la fois dans les deux plans AD, AC, en vertu du théorème précédent. Donc elle coïncide avec leur intersection AB, qui est par conséquent perpendiculaire au plan FG.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Deux angles dièdres CABD, C′A′B′D′ *sont entre eux comme les angles plans* CAD, C′A′D′ *qu'on obtient en coupant chaque dièdre par un plan perpendiculaire à l'arète.* Fig. 158.

On remarquera d'abord que tous les plans perpendiculaires à l'arète AB, fournissent des angles plans égaux. Car, soit un second angle EBF, résultant de la section du dièdre CABD par un autre plan EF perpendiculaire à l'arète AB; je

dis que l'angle EBF est égal à CAD. En effet les plans CAD, EBF, étant perpendiculaires à une même droite AB, sont parallèles (p. 4); par conséquent, les droites AC, BE sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles EF, CD par le plan BC (p. 9); par la même raison les droites AD, BF sont parallèles; donc les angles CAD, EBF, qui ont les côtés parallèles, sont égaux (p. 12).

Supposons maintenant que les angles CAD, C'A'D' soient entre eux comme deux nombres entiers 3 et 2, c'est-à-dire qu'une commune mesure soit contenue 3 fois dans l'angle CAD, et 2 fois dans l'angle C'A'D'. Partageons l'angle CAD en 3 parties égales CA*a*, *a*A*b*, etc.; l'angle C'A'D' contiendra deux de ces parties. Par les lignes de division de l'angle CAD et par l'arète AB, faites passer les plans B*a*, B*b*, etc.; par A'*a*' et A'B' menez le plan B'*a*'. Je dis que les dièdres consécutifs, formés par ces plans, sont égaux. En effet, plaçons l'angle C'A'*a*' sur son égal CA*a*; la droite A'B', perpendiculaire au plan C'*a*', coïncidera avec AB, perpendiculaire au plan C*a*; par suite, le plan B'C' coïncidera avec BC, le plan B'*a*' avec B*a*, et le dièdre C'A'B'*a*' avec CAB*a*. On démontrera de même que les autres dièdres partiels sont égaux. Or le dièdre CABD contient 3 de ces dièdres partiels, tandis que C'A'B'D' en contient 2; donc

CABD : C'A'B'D' :: 3 : 2 :: CAD : C'A'D'.

Comme l'angle C'A'D' varie d'une manière continue avec le dièdre C'A'B'D', la propriété précéde[...]e est encore vraie dans le cas où les angles CAD, C'A'D' n'ont pas de c[...]ommune mesure.

Remarque 1. Le théorème précédent se p[...]résente aussi sous l'énoncé suivant: *L'angle dièdre a po[...]ur mesure l'angle plan formé par les perpendiculaires* AC, [...]AD, *menées dans les deux faces à un même point de l'ar*[...]*te*. On attache du reste à cet énoncé absolument le même sens [...]qu'à celui qui est en tête de la proposition.

Remarque 2. Lorsque l'angle dièdre est droit, l'angl[...] per[...]AC.

plan CDF l'est aussi, puisque les deux angles dièdres CDBQ, CDBP étant égaux, leurs mesures CDF, CDE sont égales. Fig. 156.

Corollaire. Soient deux plans parallèles IK, FG coupés par un troisième plan AC. En un point quelconque A de l'intersection AB, menons un plan IG perpendiculaire à AB; il sera aussi perpendiculaire à DC qui est parallèle à AB; soient HL, IE, MG les intersections de ce quatrième plan avec les plans respectifs IG, IK, FG; les angles de ces droites mesurent ceux des plans; mais IE, MG sont parallèles (p. 9); donc entre les angles dièdres que forme un plan qui coupe deux plans parallèles, il existe les mêmes relations qui ont lieu lorsqu'une droite coupe deux droites parallèles. De même, deux dièdres qui ont les faces parallèles chacune à chacune, sont égaux ou supplémentaires. Fig. 151.

Définition vi. Un angle polyèdre est l'espace indéfini compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point S qu'on appelle le *sommet*; les angles ou plans ASB, BSC, CSD, DSA, qui comprennent l'angle polyèdre, sont appelés les *faces*; les droites AS, SB, etc., sont les *arêtes*. Fig. 159.

Si l'angle polyèdre a trois faces, on le nomme *angle trièdre*; s'il en a quatre, *angle tétraèdre*, etc.

En énonçant un angle polyèdre, nous placerons toujours la lettre du sommet au commencement.

Définition vii. Un angle polyèdre est *convexe*, s'il est situé tout entier d'un même côté par rapport à l'une quelconque de ses faces prolongée indéfiniment dans tous les sens, de sorte que ce prolongement ne peut couper aucune autre face, à moins qu'on ne la prolonge aussi.

Remarque. Un angle trièdre dont chaque face est moindre que 180° est toujours convexe. Car, soient ASB, ASC, BSC trois faces dont chacune est moindre que 180°. Prolongeons une des arêtes vers D; la face ASB, qui coupe ASC, suivant AS, ne peut plus couper cette face ASC dans l'intérieur de l'angle ASC; car, puisque l'angle ASC est plus petit que 180°, SD, prolongement de l'intersection de ASB avec ASC, ne peut pas se trouver dans l'angle ASC. — (La Fig. 160.

figure présente les arcs de cercle qui mesurent les différents angles.)

Au contraire, un angle trièdre qui a une ou plusieurs faces plus grandes que 180°, ne saurait être convexe. Car soit un angle trièdre ayant pour faces celles qui sont mesurées par les arcs AB, BC, AEDC; si l'on prolonge la face ASB, elle coupe la face SADC, suivant SD, et décompose l'angle trièdre en deux parties, dont l'une est l'angle trièdre convexe SBCD, et l'autre est l'angle dièdre EADB. L'angle trièdre proposé étant ainsi coupé par l'une de ses faces prolongées, n'est pas convexe. Un angle polyèdre, qui a plus de trois faces, peut cesser d'être convexe, sans avoir des faces plus grandes que 180°.

Tout angle polyèdre non convexe est décomposable en angles dièdres et en angles polyèdres convexes. En effet, considérons une face qui prolongée coupe l'angle polyèdre. Ce sera ou sur la face adjacente ou sur une face opposée que l'intersection a lieu. Le premier cas ne peut arriver que s'il y a des faces plus grandes que 180°. Si ce cas arrive en effet, la face qu'on prolonge retranchera de l'angle total un angle dièdre, tout en substituant à la face qui est plus grande que 180° une face moindre que 180°, savoir ce qui reste de celle-là, après qu'on en a ôté 180°. On voit à la fig. 160 comment les choses se passent. Si la face qu'on prolonge rencontre une face opposée, c'est qu'elle décompose l'angle polyèdre en deux autres qui ont moins de faces que celui-là. Donc, en continuant cette série d'opérations sur toutes les faces qui coupent l'angle polyèdre, on pourra se débarrasser de toutes les faces supérieures à 180° et réduire les angles polyèdres partiels à d'autres qui ont moins de faces, ce qui conduira finalement à des angles trièdres. Donc tout angle trièdre se décomposera en angles dièdres et en angles polyèdres convexes, puisque tout angle trièdre dont les faces sont moindres que 180° est convexe.

Un angle polyèdre qui a des faces égales ou supérieures à 180° ne saurait être convexe.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Dans tout angle trièdre convexe SABC, *la plus grande face est moindre que la somme des deux autres.*

Fig. 161. Soit ASB la plus grande face; dans le plan de cette face faites l'angle BSD égal à BSC, et tracez-y une droite BA qui



rencontre les trois droites SB, SD, SA, prises à partir du point S; prenez SC égal à SD, et joignez CB, CA. Les triangles BSD, BSC auront un angle égal compris entre côtés égaux et seront égaux; donc DB = CB. Mais on a AB < AC + CB; retranchant d'un côté DB, de l'autre son égal CB, on aura AD < AC. Cela posé, les triangles ASD, ASC auront le côté SA commun, le côté SD égal à SC, et le côté AD < AC. Donc (l. 1, p. 7) l'angle ASD < ASC; ajoutant d'un côté l'angle DSB, de l'autre son égal CSB, on a

$$ASD + DSB \text{ ou } ASB < ASC + CSB.$$

Remarque. Par conséquent dans un angle trièdre convexe chaque face est plus petite que la somme des deux autres.

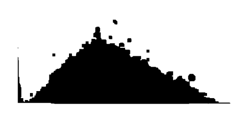
PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Dans tout angle polyèdre convexe la somme des faces est moindre que 4 angles droits. Fig. 162.

Puisque l'angle polyèdre est convexe, on peut toujours mener d'une infinité de manières un plan qui rencontre toutes les arètes (et non pas quelques arètes et les prolongements des autres).

Soit SABCDE l'angle polyèdre, ABCDE un plan qui satisfait à cette condition; le polygone ABCDE, formé par l'intersection de ce plan et des faces de l'angle polyèdre, est convexe. D'un point O, pris dans l'intérieur de ce polygone, menez aux sommets les droites OA, OB, OC, etc., ce qui formera autour du point O autant de triangles qu'il y en a autour du point S; par conséquent la somme de tous les angles des triangles en O est égale à la somme de tous les angles des triangles en S. Mais dans l'angle trièdre convexe formé en A par les trois faces EAB, EAS, SAB, la face EAB



ou EAO + OAB est moindre que la somme des deux autres EAS + SAB. De même, ABO + OBC < ABS + SBC, OCB + OCD < BCS + SCD, etc.; ainsi la somme des angles formés sur les bases, en A, B, C, D, E est plus petite dans les triangles en O que dans les triangles en S; donc, par compensation, la somme des angles en O sera plus grande que la somme des angles en S; mais la première vaut quatre droits; donc la seconde est moindre que quatre droits.

Remarque. Dans les angles polyèdres non convexes, la somme des faces n'a pas de limite.

Définition viii. Dans deux angles polyèdres composés de faces égales chacune à chacune, j'appellerai *angles dièdres homologues* ceux qui sont formés par des faces égales, chacune à chacune; j'appellerai *arêtes homologues* celles qui sont aux intersections de ces faces.

PROPOSITION XXII.

Deux angles trièdres, qui ont les faces égales chacune à chacune, ont aussi les angles dièdres homologues égaux.

Fig. 168. Soient S et S' les deux angles trièdres; supposons que les faces désignées par les mêmes lettres soient égales de part et d'autre. Par un point C, pris à volonté sur une arête SC, soit menée dans la face ASD la droite CE perpendiculaire à SC, et dans la face CSB la droite CF également perpendiculaire à SC. L'angle ECF sera la mesure du dièdre ASCB ou SC (p. 9, r. 1). Ayant pris ensuite sur SC une distance SD arbitraire, mais plus grande que SC, on prendra sur SA un point A, tel que la droite DA rencontre CE en un point E, situé entre D et A; on prendra de même sur SB un point B tel que DB coupe CF en un point F, situé entre D et B. Enfin, on tirera AB et EF. Ensuite, on prend S'C'



= SC, S'D' = SD, S'A' = SA, S'B' = SB, et on répète, du reste, sur le trièdre S' les constructions déjà faites sur S; on aura ainsi plusieurs systèmes de triangles égaux, savoir :

Les triangles SAD, S'A'D' qui ont l'angle ASD = A'S'D' par hypothèse, le côté AS = A'S' et SD = S'D'; donc l'angle ADS = A'D'S' et le côté AD = A'D'.

Les triangles DSB, D'S'B', égaux par une raison analogue, donnent l'angle SDB = S'D'B' et le côté DB = D'B'.

De même, les triangles ASB, A'S'B' égaux encore par une raison semblable, donnent le côté AB = A'B'.

De là il résulte que les triangles ADB, A'D'B' sont équilatéraux entre eux et que l'angle ADB = A'D'B'.

Mais de ce que SD = S'D' et SC = S'C', on conclut que CD = C'D'; d'ailleurs, dans les triangles CDE, C'D'E', les angles C et C' sont droits, les angles en D, et D' sont égaux comme on vient de le prouver; donc aussi ED = E'D', EC = E'C'. On prouve de même que FD = F'D', FC = F'C'.

D'ailleurs, les triangles EDF, E'D'F' sont aussi égaux puisque l'angle EDF = E'D'F', le côté DE = D'E', le côté DF = D'F'; donc EF = E'F'.

Donc enfin les deux triangles ECF, E'C'F' ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et les angles ECF, E'C'F', opposés à des côtés égaux, sont égaux. Or ces angles mesurent les dièdres SD, S'D', et par conséquent ces dièdres sont égaux.

On raisonne de même pour les autres.

Remarque 1. Supposons les faces ASB, A'S'B' placées sur un même plan de façon que les arètes homologues SA, S'A' soient parallèles et de même sens par rapport aux sommets S, S', que de même SB, S'B' soient parallèles et de même sens. Deux cas peuvent se présenter par rapport aux arètes SC, S'C'.

1° Elles peuvent être dirigées du même côté du plan

ASS'B'. Dans ce cas on dit que les faces égales des deux angles trièdres sont semblablement disposées de part et d'autre; de plus, les angles trièdres sont superposables. Car si l'on place S'A' sur SA, S'B' sur SB, l'arète S'C' restera, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, et le dièdre S'A' coïncidera avec son égal SA, et le dièdre S'B' avec SB. Ainsi les deux dièdres coïncideront.

2° Les arètes SC, S'C' peuvent être dirigées l'une SC en avant du plan ASS'B', l'autre S'C', derrière ce plan. Il est évident que si l'on place ici S'A' sur SA, S'B' sur SB, l'arète S'C' tombera derrière le plan SAB, tandis que SC est en avant. Que si, pour faire tomber S'C' en avant de ce plan, on place l'arète S'B' sur SA, S'A' sur SB, on reconnaîtra que, le dièdre S'B' n'étant pas égal au dièdre SA, la coïncidence n'aura pas lieu. Elle ne s'effectuerait que si les faces ASC, BSC étaient égales entre elles, de même que A'S'C', B'S'C', c'est-à-dire si les angles trièdres étaient isoscèles. En effet, dans ce cas on prouvera non-seulement que le dièdre SA est égal à S'A', mais encore que ce même dièdre SA est égal à S'B', de sorte que les 4 dièdres SA, S'A', SB, S'B' sont égaux; par conséquent, si l'on ne parvient pas à superposer les deux angles trièdres en plaçant S'A' sur SA et S'B' sur SB, on y réussira en plaçant S'B' sur SA et S'A' sur SB.

Deux angles trièdres qui ont les faces égales deux à deux, et par conséquent les angles dièdres homologues égaux, peuvent donc être superposables ou non. Dans le premier cas ils sont dits égaux, dans le second on dit qu'ils sont *symétriques* ou *égaux par symétrie*.

Pour former le symétrique d'un angle trièdre, on indiquera deux moyens :

Fig. 164. 1° Soit SABC l'angle donné. Prolongez les arètes AS, BS, CS au delà du sommet S; l'angle SA'B'C' sera le symétrique de SABC. Car les faces sont égales chacune à cha-

cune comme opposées au sommet. De plus, si, sans faire quitter à la face B'SA' le plan ACB'A', on fait tourner l'angle SA'B'C' autour du point S, de manière que chacun des points A', B', etc., décrive autour de A une demi-circonférence, le point A' viendra en A, le point B' en C, et les deux faces B'SA', CSA seront superposées par leurs arètes homologues; mais comme la droite C'B perce le plan ACA'B' en S, il arrivera, après cette superposition, que les arètes SB, SC' seront dirigées de différents côtés par rapport à la face commune ASC; donc les deux angles trièdres sont symétriques. Il s'ensuit que si par un point quelconque on mène des droites parallèles aux arètes d'un angle trièdre, toutes dans le même sens, on formera un second trièdre égal au premier; si on les mène toutes en sens contraire, le second est le symétrique du premier.

2° Soit SABC l'angle trièdre; d'un point C, pris à volonté sur une arète SC, menez sur la face ASB la perpendiculaire CD, qui rencontre cette face en un point D; prolongez CD de l'autre côté de cette face, à une distance DC' égale à DC; joignez SC': l'angle SABC' sera symétrique de SABC. Car si du point D on mène une droite quelconque AB, qui rencontre SA, SB en des points A, B, qu'on joigne ces deux points aux points C, C', les droites AC, AC' seront égales. En effet, CC' étant perpendiculaire au plan ASB, l'est à la droite AB; de plus CD=C'D. Les deux obliques AC, AC' s'écartent donc également de la perpendiculaire et sont égales. De même SC = SC', BC = BC'. Par conséquent les triangles ASC, ASC' sont équilatéraux entre eux et les angles ASC, ASC' sont égaux. Pareillement les angles BSC, BSC' sont égaux. D'après cela les deux angles trièdres SABC, SABC' sont compris sous des faces égales chacune à chacune. La superposition par deux arètes homologues est déjà faite, et les arètes SC, SC' tombent de part et d'autre de la face commune. Donc les deux angles trièdres sont symétriques. Il est évident maintenant que si un angle trièdre *sabc* se compose de faces égales à celles de SABC, ce nouvel angle sera superposable soit avec SABC, soit avec son symétrique SABC'. Car si l'on suppose que les faces désignées de part et d'autre par les mêmes lettres soient égales, et que l'on place *sa* sur SA, *sb* sur SB, comme l'angle dièdre *csab* = CSAB = C'SAB, *csa* coïncidera ou avec CSA ou avec C'SA, et l'angle trièdre *s* coïncidera soit avec SABC, soit Fig. 165.

avec SABC'. De là on conclut qu'avec trois faces données on peut former tout au plus deux angles trièdres, symétriques l'un de l'autre.

Remarque 2. Pour établir d'une manière précise les propriétés des angles polyèdres, convexes ou non, on va poser une convention sur la manière de compter les angles dièdres. Soient deux plans ASB, BSC qui se terminent à leur intersection ; traçons dans ces plans deux arcs de cercles AB, BC du centre S et d'un rayon arbitraire ; en un point *a* de AB élevons au plan ASB une perpendiculaire *bc* que nous prolongerons de part et d'autre de quantités arbitraires en *b* et *c*; si l'on suppose en *a* un spectateur qui regarde le point B, ayant la tête plus près du point S que les pieds, il aura le point *c* à sa gauche, le point *b* à sa droite. Supposons que cette perpendiculaire se meuve vers B, puis que le point *a* passe sur BC sans traverser aucun des deux plans, de sorte que le point *b* prendra la position *b'*, le point *c* viendra en *c'*; l'angle dièdre que le point *b* n'aura pas quitté sera appelé l'angle de *droite* ou l'angle formé à droite; celui que le point *c* n'aura pas quitté sera appelé l'angle de *gauche*. Lorsqu'il s'agira des angles dièdres d'un angle polyèdre, nous supposerons qu'ils soient pris, ou tous à droite, ou tous à gauche; mais il faudra supposer que le centre commun de tous les arcs soit au sommet S.

Fig. 166.

Dans un angle polyèdre convexe, les angles dièdres pris dans un sens convenable sont tous moindres que 180° ; un pareil angle polyèdre peut être regardé comme ayant un *intérieur* et un *extérieur*. Un angle polyèdre non convexe a des angles dièdres plus grands, d'autres plus petits que 180°; il n'est pas toujours possible de trouver un plan qui coupe toutes les arêtes d'un pareil angle polyèdre, et les mots *intérieur*, *extérieur*, appliqués dans ce cas, pourraient n'avoir qu'un sens fort vague. Supposons maintenant qu'on donne un système de faces qui doivent se suivre dans un ordre déterminé, et que nous nommerons à partir de l'une quelconque, 1re, 2e, 3e, etc., face; supposons de plus que chaque face doive comprendre avec la suivante un angle dièdre donné, ces angles étant pris tous à gauche, ou tous à droite. Je dis : 1° qu'il est impossible de former plus de deux angles polyèdres qui remplissent ces conditions; 2° que s'il est possible d'en former un, il est aussi possible d'en former un second qui n'est superposable avec le premier que dans certain cas que nous préciserons plus bas.

1° Soit ASB la première face donnée; il s'agit d'assembler d'abord avec celle-ci, par l'arête SB, une seconde face faisant avec elle un angle dièdre donné, ce qui ne peut se faire que de deux manières; soient SBC, SBC' ces faces dont la première fait avec ASB l'angle donné, à droite, la seconde à gauche; dans ces plans on fait avec SB les angles CSB, C'SB égaux à la seconde face don-

née. Maintenant chacun des angles polyèdres commencés ne peut s'achever que d'une manière; car dans l'un et l'autre les angles dièdres sont donnés, ainsi que le sens dans lequel on doit les prendre. Par SC on fait donc passer un plan qui comprenne avec SCB, à droite, un angle dièdre BCSD égal au second dièdre donné, et on fait l'angle CSD égal à la 3e face; par SC′ on mène un plan qui comprenne avec le plan C′SB, à gauche, un dièdre D′SC′B égal à DSCB, et dans ce plan on fera l'angle C′SD′ = CSD; en continuant ainsi, on formera les deux angles polyèdres qui peuvent répondre à la question. On n'en trouvera jamais plus de deux: car s'il en existe un troisième, superposons avec ASB la face qui est égale à celle-là, et ce par *les arêtes homologues;* la face égale à CSB tombera ou sur celle-ci ou sur C′SB, puisque l'angle dièdre qu'elle fait avec ASB est égal à ASBC; à partir de là, la superposition aura lieu avec l'un ou avec l'autre des deux angles déjà formés. Ainsi avec des faces et des dièdres donnés de grandeur et de position relative on ne peut jamais former plus de deux angles polyèdres. Que si l'un des deux était construit et qu'on demandât de faire l'autre, il suffirait de prolonger au delà du sommet toutes les arêtes du premier. C'est ce qu'on reconnaîtra ici, comme on l'a vu pour l'angle trièdre fig. 164.

Deux angles polyèdres qui ont tous leurs éléments égaux et placés comme on vient de l'expliquer, sont appelés symétriques. Un angle polyèdre est superposable avec son symétrique, toutes les fois qu'il est possible de le décomposer lui-même en deux angles polyèdres symétriques, au moyen d'un plan mené par le sommet.

Si d'un point pris à volonté on mène des parallèles aux arêtes d'un angle polyèdre, chacune dans le même sens que l'arête correspondante, on formera un angle polyèdre égal au premier; si on les mène en sens contraire, on obtient le symétrique de l'angle donné.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Avec trois faces données, dont chacune est moindre que 180°, on peut toujours former un angle trièdre, pourvu que chacune d'elles soit moindre que la somme des deux autres, et que la somme des trois faces soit moindre que 360°.

Parmi les trois faces données on en choisira une qui ne soit pas moindre que chacune des deux autres. Soit BAC cette face; sur BA on placera l'angle BAD égal à l'une de ces deux-là, et sur AC l'angle CAE égal à la troisième, l'un et l'autre dans le plan de BAC. Fig. 167.

Du point A comme centre et d'un rayon arbitraire AD décrivez un cercle; du point D où il coupe DA abaissez sur AB la perpendiculaire DD′ : l'arc BD′ sera égal à DB; de même du point E menez EE′ perpendiculaire à AC; l'arc CE′ sera égal à CE. Or comme l'angle $BAC < BAD + CAE$, l'arc BC sera aussi $< BD + CE$ ou que $BD' + CE'$; ainsi le point E′ tombera au delà de D′ par rapport au point C; d'ailleurs puisque l'angle BAC n'est surpassé ni par l'angle CAE ni par BAD, les points D′, E′ ne dépassent pas les extrémités de l'arc BC. Enfin, la somme des trois angles donnés étant moindre que quatre droits, le point E ne sera situé entre les points B et D. Donc les points E, E′ sont de différents côtés de la corde DD′, de sorte que les deux cordes DD′, EE′ se couperont dans le cercle en un point I. Par ce point I élevez au plan BAC une perpendiculaire IK; par IK et par DD′ imaginez un plan, et dans ce plan décrivez du point G comme centre avec le rayon GD un arc qui coupera cette perpendiculaire IK en un point K, puisque GD ou $GD' > GI$; joignez KA; je dis que ABKC sera l'angle trièdre cherché. Car puisque $GK = GD$, que AG est commun et que les angles AGD, AGK (p. 6) sont droits, on aura $AK = AD$ et l'angle $GAK = GAD$. Joignant KH, on aura aussi un angle droit KHA (p. 6), et les deux triangles AKH, AHE seront égaux; car outre les angles droits en H, ils ont le côté AH commun, les côtés AK, AE égaux entre eux comme égaux à AD; donc l'angle $KAH = HAE$, et l'angle trièdre ABKC est formé avec les trois faces données. Si au lieu de la face BAD on donnait la face BAF telle, que BAC fût $> BAF + CAE$, la perpendiculaire FF′ menée du point F sur AC ne couperait pas EE′ dans le cercle, et la construction serait impossible, ce qui est d'accord avec la proposition 20.

La figure 168 représente la construction dans le cas où les trois angles donnés sont obtus.

Fig. 169. Si la somme des angles donnés est plus grande que 360°, la construction ne réussit pas non plus, en supposant chaque face moindre que 180°. Soient BAC, BAD, CAE les trois faces, BAC n'étant inférieure à aucune des deux autres. Du point A comme centre et d'un rayon arbitraire on décrit encore une circonférence. Puisque aucune des faces ne surpasse 180°, les points E, D ne seront pas sur l'arc BC; l'arc BD sera d'ailleurs $> BE$, et si l'on prend $BD' = BD$, $CE' = CE$, on a aussi $BD' + CE' > BC$. Ainsi les points E, E′ tombent du même côté de la corde DD′, de sorte que les cordes EE′, DD′ ne se couperont pas dans le cercle.

Remarque. Si l'on donne trois faces a, b, c, dont l'une a soit plus grande que 180°, on cherchera à construire l'angle trièdre dont les faces sont $360° - a, b, c$. On opère de même si deux des faces, ou si les trois, sont plus grandes que 180°.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Si d'un point o, *pris dans un angle trièdre convexe* OABC, *on abaisse sur les trois faces* AOB, AOC, BOC *des perpendiculaires* oc, ob, oa, *on déterminera un nouvel angle trièdre convexe* oabc *dans lequel les faces* aob, boc, aoc *sont les suppléments des dièdres* OC, OA, OB, *tandis que les dièdres* oa, ob, oc *sont les suppléments des faces* BOC, AOC, AOB. Fig. 170.

Soient *a*, *b*, *c* les pieds des perpendiculaires *oa*, *ob*, *oc* sur les faces respectives BOC, AOC, AOB; par ces perpendiculaires, prises deux à deux, menez les plans *aob*, *aoc*, *boc* qui couperont les arètes de l'angle trièdre O en des points C, B, A; joignez A*b*, A*c*, B*a*, A*c*, C*a*, C*b*.

Je dis d'abord que chaque arète de l'angle O est perpendiculaire à une face de l'angle *o*. En effet, le plan *aob* est perpendiculaire au plan AOC, comme passant par une droite *ob* perpendiculaire à ce dernier (p. 15); le même plan *aob* est aussi perpendiculaire au plan BOC, comme passant par la droite *ao* perpendiculaire à celui-ci. Donc les deux plans AOC, BOC sont perpendiculaires au plan *aob*, et, par conquent, leur intersection OC est aussi perpendiculaire au plan *aob* (p. 18). On prouvera de même que l'arète OB est perpendiculaire au plan *aoc*, et que OA l'est au plan *boc*.

Cela posé, la droite *oc*, perpendiculaire au plan AOB, l'est aux droites A*c*, B*c* menées par son pied dans ce plan; donc l'angle A*c*B formé par deux perpendiculaires menées à un même point de l'arète *oc*, dans les faces A*co*, B*co*, mesure le dièdre *co* (p. 19); mais AO étant perpendiculaire au plan *cob*, l'est à A*c*, située dans ce plan; ainsi l'angle OA*c* est droit; de même l'angle OB*c* est droit. Donc le quadrilatère BOA*c* a deux angles droits en A, B, et par suite l'angle

AOB, face de l'angle trièdre O, est le supplément de l'angle AcB qui mesure le dièdre *oc* de l'angle *o*. On démontrera de même que la face AOC est le supplément du dièdre *ob*, et que la face BOC est le supplément du dièdre *oa*.

De même, puisque l'arète AO est perpendiculaire au plan *boc*, elle l'est aux droites A*b*, A*c*, dont l'angle *b*A*c* mesure, par conséquent, le dièdre AO. Or *bo* étant perpendiculaire au plan AOC, l'angle A*bo* est droit; par une raison semblable l'angle A*co* est droit; donc, dans le quadrilatère *boc*A, l'angle *b*A*c* qui mesure le dièdre AO est supplément de *boc*, face de l'angle *o*. On reconnaît de même que les dièdres BO, CO sont les suppléments respectifs des faces *aoc*, *aob*.

Remarque et définition. Les deux angles O et *o* sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre.

Corollaire 1. *Deux angles trièdres qui ont les dièdres égaux chacun à chacun sont égaux ou symétriques.* Car, puisque dans les deux angles trièdres proposés les dièdres sont égaux chacun à chacun, les trièdres supplémentaires auront les faces égales chacune à chacune; par conséquent ces trièdres supplémentaires auront aussi leurs angles dièdres égaux chacun à chacun; donc enfin les trièdres proposés ont aussi les faces égales chacune à chacune et sont superposables ou symétriques.

Corollaire 2. On reconnaît aisément que si deux trièdres ont un dièdre égal compris entre deux faces égales, chacune à chacune, l'un de ces trièdres est superposable avec l'autre ou avec le symétrique de celui-ci. De là, et de la proposition qu'on vient de prouver on conclura que si deux trièdres ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, ces deux trièdres sont égaux ou symétriques.



LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

Définition i. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans. Ces plans terminés à leurs intersections mutuelles, se nomment des *faces*, et leurs intersections prennent le nom d'*arètes*.

Les points d'intersection des arètes sont appelés *sommets*.

Une *diagonale* d'un polyèdre est une droite qui joint deux sommets non situés sur la même face.

Une *surface polyèdrale* est une suite de plans terminés à leurs intersections mutuelles; la surface peut être fermée ou non.

Définition ii. On appelle *tétraèdre* le polyèdre à 4 faces: c'est le plus simple des corps terminés par des plans. On nomme *pentaèdre*, *hexaèdre*, *dodécaèdre*, *icosaèdre*, etc., les polyèdres à 5, 6, 12, 20, etc., faces.

Définition iii. Le *prisme* est un polyèdre dont deux faces ABCDE, A'B'C'D'E' sont des polygones égaux, les côtés égaux étant parallèles et de même sens; les autres faces de ce polyèdre sont des parallélogrammes ABB'A', BCC'B', etc. A la proposition 13 du livre 5 on voit comment ce corps se construit. L'ensemble des parallélogrammes AB', BC', etc., se nomme la *surface latérale* du prisme. Fig. 171.

Définition iv. Les faces ABCDE, A'B'C'D'E' sont *les bases* du prisme.

Définition v. La *hauteur* d'un prisme est la distance des plans des bases.

Définition vi. Le prisme est appelé *droit* si les *arètes latérales* AA', BB', etc., sont perpendiculaires aux bases. Dans ce cas, les *faces latérales* AA', BB', etc., sont aussi perpendiculaires aux bases. La hauteur d'un prisme droit est égale aux arètes latérales.

Définition vii. Un prisme est appelé *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Fig. 171. *Les sections* KLMNO, PQRST, *faites dans un prisme par des plans parallèles, sont égales.*

Puisque les plans KMO, PRT sont parallèles, les droites KL, PQ le sont aussi comme intersections d'un plan AB' par deux plans parallèles (p. 9); de plus ces droites KL, PQ sont égales comme parallèles comprises entre des parallèles AA', BB'. On prouvera de même que QR est égal et parallèle à LM, RS à MN et ainsi de suite. Les deux polygones sont donc équilatéraux entre eux. Mais ils sont aussi équiangles[1] entre eux. Car PQ étant parallèle à KL, et QR à LM, l'angle PQR est égal à KLM; de même l'angle QRS l'est à LMN, etc. Donc enfin ces polygones sont égaux.

Corollaire 1. Toute section parallèle à la base d'un prisme est par conséquent égale à cette base. Si donc on fait dans un prisme tant de sections qu'on voudra, toutes parallèles aux bases, elles seront égales aux bases. Il suit de là que si l'on fait glisser la base ABCDE de façon que son

[1] C'est-à-dire ils ont les angles égaux deux à deux.

plan reste parallèle à A′B′C′D′E′, que le point A ne quitte pas l'arète AA′, et que le côté AB ne cesse pas d'être parallèle à A′B′, ce polygone ABCDE viendra coïncider successivement avec toutes les sections dont on a parlé; ainsi ses côtés parcourront toute la surface latérale, et sa surface parcourra tout le volume du prisme, ce qu'on exprime en disant que le prisme peut être *engendré* ou *décrit* par un polygone plan ABCDE qui se meut de façon qu'un de ses sommets A parcourt une droite AA, et que ses côtés restent chacun parallèle à lui-même.

On peut supposer la droite AA′ indéfinie dans les deux sens, et alors le contour du polygone décrit une *surface prismatique* indéfinie.

On peut encore engendrer la surface prismatique en supposant que le polygone ABCDE reste immobile, et que la droite AA′, prolongée indéfiniment, se meuve en restant parallèle à sa direction actuelle, et s'appuyant sur le contour ABCDE.

Définition VIII. Le *parallélipipède* est un prisme dont les bases ABCD, EFGH sont des parallélogrammes. Ce corps est donc compris sous six parallélogrammes. Fig. 172.

Définition IX. Si le parallélipipède est droit et que les bases soient des rectangles, toutes les six faces sont des rectangles, et le corps se nomme *parallélipipède rectangle.*

Définition X. Enfin, si dans un parallélipipède rectangle la base est un carré, et que la hauteur soit égale au côté de ce carré, la figure a pour faces six carrés égaux, et se nomme *cube.*

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Dans tout parallélipipède les faces opposées sont égales et parallèles, et les diagonales se coupent mutuellement en parties égales. Fig. 172.

Soient ABCD, EFGH les bases du parallélipipède, lesquelles sont, d'après la définition, des parallélogrammes égaux situés dans des plans parallèles. Je dis qu'il en est de même de deux faces opposées quelconques, telles que AF et DG. Car, puisque ABCD est un parallélogramme, la ligne AB est égale et parallèle à CD; de même CBFG étant un parallélogramme, la droite BF est égale et parallèle à CG; donc les angles ABF et DCG, qui ont les côtés parallèles et de même sens, sont égaux, et leurs plans sont parallèles. Cela posé, si l'on a égard à l'égalité de ces deux angles, ainsi qu'à celle des lignes AB, DC d'un côté, et des lignes BF, CG de l'autre, on reconnaîtra que le parallélogramme AF est égal à DG. On raisonne de même pour deux faces opposées quelconques.

En second lieu, soient deux diagonales AG, BH. Le côté HG est égal et parallèle à DC, qui est lui-même égal et parallèle à AB, à cause des parallélogrammes; donc HG l'est aussi à AB, et la figure ABGH est un parallélogramme, dont les diagonales AG, BH se coupent mutuellement en deux parties égales (l. 1, p. 23). On prouvera de même que chacune des deux autres diagonales passe au milieu de l'une de ces deux-là. Donc elles se coupent toutes les quatre en un point qui est le milieu de chacune.

Corollaire. Puisque dans un parallélipipède deux faces opposées sont égales et parallèles, on peut prendre pour bases une face quelconque et son opposée.

Remarque. Les angles trièdres opposés tels que A et G, ont les arêtes parallèles chacune à chacune, mais de sens contraire. Ils sont donc symétriques (l. 5, p. 22).

Fig. 173. *Définition XI.* Une *pyramide* est un polyèdre compris sous plusieurs faces triangulaires SAB, SBC, SCD, etc., partant toutes d'un même point S, et se terminant aux côtés d'un polygone plan ABCDEF, qu'on nomme la *base;* le point S est le *sommet* de la pyramide. L'ensemble des trian-



gles SAB, SBC, etc., se nomme la *surface latérale de la pyramide.*

Définition XII. La hauteur d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan indéfini de la base.

Définition XIII. La pyramide est appelée *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale,* etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc. La pyramide triangulaire est un tétraèdre.

Définition XIV. Deux points sont dits *symétriques* par rapport à une droite ou par rapport à un plan, lorsque cette droite ou ce plan, est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.

Définition XV. Deux figures sont dites symétriques lorsqu'on peut les placer par rapport à un plan de façon que chaque point de l'une des figures ait, relativement à ce plan, son symétrique dans l'autre.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Si plusieurs points A, B, C, D *déterminent un polygone plan, leurs symétriques* A′, B′, C′, D′..., *pris par rapport à un plan quelconque* abc, *détermineront un polygone égal au premier.* Fig. 174.

Soient menées les droites AA′, BB′, CC′, DD′... qui rencontrent le plan de symétrie aux points *a*, *b*, *c*, *d*... D'après la définition on a $Aa = A'a$, $Bb = B'b$, $Cc = C'c$, $Dd = D'd$.

Celà posé le trapèze *ab*AB peut se superposer avec *ab*A′B′. Car l'angle droit *ba*A coïncidera avec *ba*A′, et comme $aA = aA'$, le point A tombera en A′, de même B tombera sur B′; donc $AB = A'B'$. On prouvera aussi que $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ et en général que la distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques. Donc aussi le triangle ABC qui a pour sommets trois points quelconques A, B, C, est égal à celui qui a pour sommets leurs symétriques A′, B′, C′, puisque ces triangles sont équilatéraux entre eux. Ainsi l'angle $ABC = A'B'C'$, l'angle $ABD = A'B'D'$, l'angle $DBC = D'B'C'$. Or, comme la figure ABCD est plane, on a

$$ABC = ABD + DBC, \qquad \text{donc on a aussi}$$
$$A'B'C' = A'B'D' + D'B'C',$$

et par conséquent la figure A′B′C′D′ est aussi plane, sans quoi les trois angles A′B′C′, A′B′D′, D′B′C′ formeraient un angle trièdre dans lequel chaque face serait moindre que la somme des deux

autres. D'ailleurs les deux figures ABCD, A'B'C'D' sont équilatérales et équiangles entre elles; donc elles sont égales.

Corollaire 1. Tous les points du plan ABCD ont donc leurs symétriques dans le plan A'B'C'D'. De plus, une droite AB peut être considérée comme l'intersection de deux plans; donc les symétriques de tous les points d'une droite sont en ligne droite. Ainsi pour que deux polygones soient symétriques, il suffit que les sommets le soient respectivement, pourvu que deux sommets de l'un des polygones ne déterminent un côté que si leurs symétriques dans l'autre sont dans le même cas. Et pour que deux polyèdres soient symétriques il suffit que les sommets le soient respectivement, pourvu que trois sommets, non en ligne droite, ne soient sur une face de l'un des polyèdres, que si leurs symétriques dans l'autre sont dans le même cas. Ce qu'on vient de dire convient à tous les polyèdres convexes ou non.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Deux polyèdres symétriques sont compris sous un même nombre de faces égales chacune à chacune, et les angles polyèdres dont les sommets sont des points symétriques, sont des angles polyèdres symétriques.

Si l'on prend une face de l'un des polyèdres, le lieu des points symétriques de tous ceux de cette face est un polygone égal à cette face (p. 3, c.) Donc les deux corps sont compris sous un même nombre de faces égales chacune à chacune.

Fig. 175. En second lieu soient S, S' deux sommets symétriques; A, B, C, D, E les sommets adjacents à S; A', B', C', D', E' leurs symétriques. De ce qui a été prouvé (p. 3) il résulte que l'angle ASB = A'S'B', BSC = B'S'C', etc.; ainsi les angles polyèdres S, S' ont les faces égales chacune à chacune et assemblées par les arêtes homologues. Si l'on conçoit les plans ASC, A'S'C', les angles ASC, A'S'C' seront aussi égaux; donc les angles trièdres SABC, S'A'B'C' ont les faces égales chacune à chacune, et les dièdres BS, B'S' sont égaux (l. 5, p. 22.) On prouvera de même que les dièdres formés de part et d'autre par des faces égales sont égaux. Actuellement si l'on fait parcourir les deux angles polyèdres S, S' à deux perpendiculaires dans le sens ABC, etc., A'B'C', etc., conformément à la convention établie (l. 5, p. 22, r. 1) on reconnaîtra que dans l'angle S les angles dièdres étant formés à droite, ceux de l'angle S' le sont à gauche. Donc les angles polyèdres S, S' sont symétriques. Pour

s'en assurer d'ailleurs on n'a qu'à placer l'arête BS sur B'S' et AS sur A'S'.

Corollaire 1. Tous les symétriques d'un même polyèdre sont superposables. Car nommons S'', A'', B'', etc., les sommets symétriques de S, A, B, etc., par rapport à un plan quelconque, différent du plan MN. Les angles S'', S', symétriques du même angle S, seront égaux (l. 5, p. 22, r. 1) et se superposeront; tous les polygones, faces de S'', se superposeront avec les faces respectives de S'. Les angles polyèdres formés en A', A'' seront aussi superposables, et comme deux de leurs faces sont déjà superposées, savoir, les faces dont font partie les angles A'S'B', A'S'E', ces deux angles coïncideront dès que S', S'' sont superposés, et ainsi de suite.

Corollaire 2. Deux polyèdres terminés par des faces égales deux à deux formant de part et d'autres des angles polyèdres symétriques, sont symétriques; car le second polyèdre sera superposable avec le symétrique du premier. Il s'ensuit que les deux prismes triangulaires dans lesquels se décompose un parallélipipède sont symétriques.

Corollaire 3. Un corps est superposable avec son symétrique toutes les fois que ce corps peut être divisé lui-même par un plan en deux parties symétriques par rapport à ce plan. Car si l'on prend ce même plan pour plan de symétrie afin de construire le symétrique du corps donné, chacune des deux parties aura l'autre pour symétrique, et par conséquent le symétrique du corps se confond avec le corps même.

Définition XVI. Deux figures sont dites *semblables*, si on peut les placer de façon qu'à chaque point de l'une il réponde dans l'autre un point distinct tel que la droite qui joint ces points correspondants, aille passer en un point donné, et y soit divisée en 2 segments dont le rapport est constant. Si les segments sont tous *soustractifs*, la similitude est dite *directe*; si les segments sont tous *additifs*, la similitude est dite *inverse*. Voyez d'ailleurs les définitions 6 à 10, livre 3.

Définition XVII. Deux plans sont appelés *homologues* si l'un des deux contient trois points homologues à trois points respectifs de l'autre.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Fig. 176. *Deux figures, directement semblables à une troisième, sont égales, si ces deux figures ont une dimension égale, pourvu que cette dimension soit homologue à une même dimension de la troisième figure.*

Soient a, b, c, d..., a', b', c', d'... les deux figures supposées directement semblables à la troisième A, B, C, D, etc. Soient O, O' les centres de similitude. On prouvera ici comme à la proposition 11 du troisième livre, que si $ab = a'b'$, on a aussi $ac = a'c'$, $ad = a'd'$. De plus ab et $a'b'$ seront parallèles entre elles comme parallèles à AB; ac, $a'c'$ seront aussi parallèles entre elles, etc. Si donc les 4 points A, B, C, D sont dans un même plan, les plans abc, abd (l. 5, p. 12) parallèles tous les deux à ce plan ABCD..., coïncideront; de même a', b', c', d', seront dans un plan. Par conséquent on pourra placer ab sur son égal $a'b'$, ad coïncidera avec $a'd'$, ac avec $a'c'$, et tous les points de $abcd$... qui seront dans le plan $abcd$..., coïncideront avec les points correspondants de $a'b'c'd'$... Supposons actuellement que le point d ne soit pas dans le plan abc, on aura en a un angle trièdre $abcd$ qui aura ses arètes parallèles à celles de l'angle trièdre $a'b'c'd'$, et comme les arètes parallèles sont de même sens, ces deux angles trièdres sont égaux et superposables. Donc après que le plan bac aura coïncidé avec le plan $b'a'c'$, un point quelconque d, pris hors de ce plan, coïncidera avec un point d' de la seconde figure. Donc ces deux figures sont égales.

Corollaire. On peut donc prendre le centre de similitude à volonté lorsqu'il s'agit de construire une figure semblable à une figure donnée; on peut le prendre dans l'espace, même s'il s'agit d'une figure plane.

Remarque. Les deux figures *abcd*, *a'b'c'd'*... seraient encore égales, si elles étaient toutes les deux inversement semblables à la troisième. Enfin, si ces deux premières sont planes, elles sont égales encore, si l'une est directement, l'autre inversement semblable à la troisième.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Toute figure semblable à un polyèdre est un second polyèdre ayant autant de faces que le premier.

Car le lieu de tous les points homologues à ceux d'une face de polyèdre donné forme une face semblable et parallèle à celle-là (p. 5, c.). Comme il en est de même de chaque face de l'une des figures par rapport à l'autre, il s'ensuit que la seconde figure est un polyèdre ayant autant de faces que le premier.

Corollaire. Pour que deux polyèdres soient semblables, il suffit qu'on puisse les placer de façon qu'à chaque sommet de l'un, il réponde dans l'autre un sommet qui soit un point homologue du premier par rapport à un centre de similitude quelconque, pourvu cependant que, si plusieurs sommets de l'un quelconque de deux polyèdres, déterminent une face, il en soit de même de leurs homologues dans l'autre.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres, directement semblables, ont les faces homologues semblables, également inclinées, semblablement disposées, et les angles polyèdres homologues égaux; et réciproquement. Fig. 177.

Soient ABCDEFGHIK... plusieurs faces adjacentes d'un polyèdre; *abcd*, etc., celles d'un second polyèdre directe-

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Fig. 171. *La surface latérale d'un prisme est égale à l'arète* AA', *multipliée par le contour d'une section* KLMNO, *perpendiculaire aux arètes.*

Car cette surface se compose d'une série de parallélogrammes AB', BC', CD', etc., dont chacun a pour mesure le produit de la base par la hauteur. Mais le plan KLMNO étant perpendiculaire aux arètes AA', BB', etc., il s'ensuit que ces arètes sont perpendiculaires aux droites KL, LM, etc., situées dans ce plan. Donc, si l'on prend AA', BB', etc., pour bases de ces parallélogrammes, les hauteurs seront KL, LM, MN, etc. Ainsi,

la surface AB' a pour mesure AA' × KL,

la surface BC', de même... BB' × LM ou AA' × LM,

et ainsi des autres. Donc la somme de ces parallélogrammes a pour mesure AA' × (KL + LM + MN + etc.), c'est-à-dire l'arète AA multipliée par le contour de la section KLMNO perpendiculaire aux arètes.

Corollaire. Si le prisme est droit, la section KLMNO est égale à la base, et la surface convexe du prisme est égale à son arète, ou à sa hauteur, multipliée par le périmètre de la base.

Fig. 173. *Définition XVIII.* Une pyramide est dite *régulière*, si la base ABCDEF est un polygone régulier, et que la hauteur SO passe au centre O de cette base. La surface latérale d'une pareille pyramide se compose de triangles isoscèles égaux, SAB, SBC, etc. Car les rayons du polygone AO, BO, etc., étant égaux, les arètes AS, BS, etc., sont égales comme obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire. Donc ces triangles sont équilatéraux entre eux et d'ailleurs isoscèles. La hauteur SG de l'un de ces triangles, ligne qui,



a la même longueur pour tous, se nomme l'*apothème* de la pyramide.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

La surface latérale d'une pyramide régulière est égale au périmètre de la base multiplié par la moitié de l'apothème SG. Fig. 173.

Car l'aire du triangle SAB est égale à AB $\times \frac{1}{2}$SG; il en est de même des autres triangles SBC, SCD, etc. Donc la somme de ces triangles est égale à (AB + BC + ... + FA) $\times \frac{1}{2}$ SG.

Remarque sur le rapport des volumes. Un parallélipipède peut se diviser en parties égales. Si l'on divise l'arète AF en 11 parties égales, et que par les points de division on mène des plans parallèles à la base AD, on divisera le parallélipipède AA' en 11 parties égales; la réunion de deux de ces parties fait les $\frac{2}{11}$ de AA'. Ainsi un parallélipipède peut être multiplié par un nombre commensurable quelconque. Fig. 178.

On peut aussi multiplier un parallélipipède par un nombre incommensurable; c'est ce qu'on reconnaîtra, comme on l'a vu au commencement du livre 4, pour le parallélogramme.

Cela posé, le rapport de deux parallélipipèdes est un nombre abstrait tel, que le produit du second parallélipipède par ce nombre est égal au premier et en général:

Définition xix. Le *rapport* des volumes de deux corps est un nombre abstrait tel, que le produit du second corps par ce nombre est égal au premier.

A l'appui de cette définition remarquez que si, sans toucher à la base AD, on fait varier l'arète AF infiniment peu, le parallélipipède varie aussi infiniment peu; de sorte que si l'arète AF varie d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, le volume du parallélipipède varie de même. Si donc on a à comparer les volumes Fig. 178.

de deux corps, on peut toujours les supposer remplacés par des parallélipipèdes ayant même base ABCD, et un angle trièdre commun en A. Dès lors l'idée du rapport des volumes de ces corps devient très-nette et très-précise.

Définition xx. La *mesure* du volume d'un corps est le rapport de ce volume à un autre pris pour unité. On montrera comment le rapport des volumes se ramène aux rapports des surfaces et des lignes.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Fig. 178. *Si deux parallélipipedes* AA′, GG′ *ont un angle trièdre égal en* A *et en* G, *leurs volumes sont entre eux comme les produits des arètes qui forment de part et d'autre l'angle égal, de sorte qu'on a*

AA′ : GG′ :: AB × AC × AF : GK × GH × GL.

Supposons qu'on ait AB : GK :: 7 : 4
AC : GH :: 3 : 2
AF : GL :: 11 : 5,

les arètes que l'on compare étant celles qui prennent la même direction, lorsqu'on superpose les angles A et G.

Divisons AB en 7 parties égales, GK en contiendra 4; divisons de même AC en 3 parties égales, GH en contiendra 2. On pourra donc décomposer la base AD en 7 × 3 parallélogrammes égaux, la base GI en contiendra 4 × 2. Si par les sommets de ces parallélogrammes on mène des parallèles aux arètes latérales dans chacun des deux corps, le premier AA′ sera décomposé en 7 × 3 parallélipipèdes égaux, ayant pour bases les parties de la base AD, et pour arètes latérales des lignes égales à AF. Dans GG′ les différentes parties auront des arètes latérales égales à GL, et le nombre en sera 4 × 2.

Divisons maintenant AF en 11 parties égales; GL en contiendra 5. Si par les points de division de AF et de GL on mène des plans parallèles aux bases, chacun des 7×3 parallélipipèdes partiels de AA′ sera divisé en 11 parties égales, telles que A*acdgfeb;* AA′ en contiendra donc $7 \times 3 \times 11$. De même GG′ en contient $4 \times 2 \times 5$, et comme ces parties sont toutes égales, on a

$$AA' : GG' :: 7 \times 3 \times 11 : 4 \times 2 \times 5,$$

ou, à cause des proportions ci-dessus

$$:: AB \times AC \times AF : GK \times GH \times GL.$$

Si les arètes correspondantes ne sont pas commensurables entre elles, cette proportion a encore lieu en vertu de la proposition 4 du livre 3.

Corollaire. Soit P un parallélipipède rectangle, A, B, C ses trois arètes, p un cube, a son arète. D'après le théorème qu'on vient de prouver, on a

$$P : p :: A \times B \times C : a \times a \times a,$$

ou

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{a} \times \frac{C}{a}.$$

Prenons p pour unité de volume, a pour unité de longueur; $\frac{P}{p}$ sera la mesure du parallélipipède P; $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{a}$, $\frac{C}{a}$ seront les mesures de ses trois arètes. Donc *la mesure du volume d'un parallélipipède est égal au produit de ses* 3 *arètes.* Si l'on représente la mesure $\frac{P}{p}$ par P_1, $\frac{A}{a}$ par A_1, $\frac{B}{a}$, $\frac{C}{a}$ par B_1, C_1, la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$P_1 = A_1 \times B_1 \times C_1.$$

Dans cette relation, de même que dans l'énoncé précédent, il y a deux unités sous-entendues: l'unité de longueur, et l'unité de volume, qui est le cube construit sur l'unité de longueur.

Le produit de $A_1 \times B_1$ n'est autre chose que l'aire du

rectangle qui a pour côtés les arètes A, B. Si on regarde ce rectangle comme la base du parallélipipède, l'arète C en sera la hauteur, et l'on peut encore dire que le *volume du parallélipipède est égal au produit de sa base* $A_1 \times B_1$, *par sa hauteur* C_1. Ici il y a 3 unités sous-entendues : 1° l'unité de longueur; 2° l'unité de surface qui est le carré construit sur l'unité de longueur; 3° l'unité de volume qui est le cube construit sur cette même unité de longueur. Tous les énoncés analogues au précédent devront être entendus de la même manière dans le reste de cet ouvrage.

Pour mesurer le volume d'un parallélipipède rectangle en mètres cubes, il faudra donc mesurer ses trois arètes en mètres, et faire le produit de ces trois mesures; si les arètes sont mesurées en pieds, ce produit sera le volume du parallélipipède, exprimé en pieds cubes; si les arètes sont exprimées en décimètres, le volume le sera en décimètres cubes.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Fig. 179. 1° Soit un prisme triangulaire droit ABCA'B'C'. Du point B, sommet du plus grand des trois angles de la base ABC, menez BD perpendiculaire à AC; par BD et BB' faites passer le plan B-D, qui partagera le prisme en deux autres ayant pour bases les triangles rectangles ABD, DBC. Sur les triangles ABD, A'B'D' achevez les rectangles AEBD, A'E'B'D', et joignez EE'. Les deux prismes droits ABDD', ABEE' seront superposables; en effet, la base ABD peut se placer sur AEB, et les arètes latérales, toutes perpendiculaires aux bases, coïncideront comme étant d'ailleurs

égales. Or le parallélipipède rectangle ABEE′D′ a pour mesure aire ADBE × BB′; donc chacun de ces prismes a pour mesure la moitié de ce produit, ou ABD × BB′. Par une raison semblable, le prisme DBCB′ a pour mesure BDC × BB′; donc le prisme donné a pour mesure (ABD + BDC) × BB′ ou ABC × BB′, c'est-à-dire le produit de la base par la hauteur.

2° Soit, en second lieu, un prisme triangulaire oblique ABCA′B′C′. Par les trois sommets A, B, C, imaginez des plans perpendiculaires aux arêtes latérales; l'un de ces trois plans sera compris entre les deux autres, à moins que deux d'entre eux ne se confondent. Ce second cas est renfermé dans le premier. Supposons que le plan mené par A soit compris entre les deux autres; il coupera la base ABC suivant une droite AD, et l'arête BB′ en un point E; joignez DE, AE. Au point A′ menez de même le plan D′A′E′ perpendiculaire aux arêtes; joignez DD′. La figure ADEA′D′E′ est un prisme; car les plans ADE, A′D′E′, perpendiculaires à AA′, sont parallèles. Donc les trois droites AA′, DD′, EE′ sont égales (l. 5, p. 11), et la figure est un prisme (l. 5, p. 13); ce prisme est droit et a pour mesure ADE × AA′. Fig. 180.

Or les deux tétraèdres ADEB, A′D′E′B′ sont superposables. Car on peut placer la base ADE sur son égale A′D′E′, et la droite EB prendra la direction de E′B′, parceque ces droites sont perpendiculaires aux plans ADE, A′D′E′. Mais les droites EE′, BB′, égales à AA′, sont égales entre elles; donc EB′ — EE′ = EB′ — BB′ ou E′B′ = EB, le point B tombera en B′, et les deux tétraèdres sont égaux. Or si de la figure ADEA′D′B′ on retranche le tétraèdre A′D′B′E′, il reste le prisme droit A′D′E′ADE; si, au contraire, on retranche le tétraèdre ADEB, il reste le prisme oblique ADBA′D′B′; ainsi, ces deux prismes sont équivalents, et ce dernier a aussi pour mesure ADE × AA′. Cela posé, du point E soit menée EG perpen-

diculaire à AD, et soit joint BG qui sera aussi perpendiculaire à AD (l. 5, p. 6). Prolongez cette droite GB, et du point B' menez-lui la perpendiculaire B'F. Je dis que cette droite est la hauteur du prisme oblique. Car la droite AD, perpendiculaire aux deux droites GE, GF, l'est à leur plan GEFB'; donc le plan BAD, qui passe par AD, est aussi perpendiculaire au plan GEFB' (l. 5, p. 15); mais B'F est mené dans ce dernier plan perpendiculairement à l'intersection GF; donc B'F est perpendiculaire au plan ABD (l. 5, p. 16); cette droite est donc la hauteur du prisme. Or, les triangles rectangles GBE, BB'F, ayant d'ailleurs les angles en B égaux, sont semblables, et donnent

$$GE : B'F :: GB : BB' \text{ ou } AA',$$

d'où $$GE \times AA' = GB \times B'F,$$

multipliant par $\frac{1}{2}$ AD, on a

$$\tfrac{1}{2} AD \times GE \times AA' = \tfrac{1}{2} AD \times GB \times B'F,$$

ou $$ADE \times AA' = ADB \times B'F;$$

donc le prisme ADBA'D'B' a pour mesure sa base ADB multipliée par sa hauteur B'F. De même ACDA'C'D' a pour mesure ADC × B'F. Donc le prisme ABCA'B'C' a pour mesure ABC × B'F.

3° Soit enfin un prisme quelconque ABCDEA'. On partagera la base en triangles ABC, ADC, ADE; par les droites AC, AD on fait passer des plans qui contiennent l'arête AA', ce qui décomposera le prisme donné en prismes triangulaires, dont chacun aura pour mesure le produit de sa base par la hauteur du prisme donné. Leur somme aura donc pour mesure le produit de cette hauteur par la somme des bases, c'est-à-dire par la base ABCDE.

Fig. 184.

Corollaire 1. Deux prismes de même hauteur et de bases équivalentes, sont égaux en volume.

Corollaire 2. Deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et deux prismes de bases équivalentes sont entre eux comme leurs hauteurs.

PROPOSITION XIII.

THÉORÈME.

Si deux pyramides de même hauteur ont leurs bases sur un même plan, et qu'on les coupe par un plan mn *parallèle à celui des bases :* Fig. 182.

1° *Les arètes latérales et la hauteur sont coupées proportionnellement ;*

2° *Les sections sont semblables aux bases, et sont entre elles comme ces bases.*

1° Soient ABCDE, FGH les bases; puisque les deux pyramides ont même hauteur, on peut leur supposer le même sommet S. Soient *a, b, c*..., les points où les arètes latérales sont rencontrées par le plan *mn*. Les droites *ab*, AB sont parallèles comme intersections du plan ASB par les plans parallèles *mn*, AG; donc on a S*a* : SA :: S*b* : SB, de même S*c* : SC :: S*f* : SF :: etc.

2° Les figures ABCDE, *abcde* sont semblables puisqu'à chaque sommet A, B... de l'une répond dans l'autre un sommet *a, b*... tel que les droites A*a*, B*b*..., concourent en S et y sont divisées proportionnellement. Par conséquent, ABCDE : *abcde* :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (l. 4, p. 7). Mais le rapport AB : *ab* est égal au rapport de similitude SA : S*a*. Donc

$$ABCDE : abcde :: \overline{SA}^2 : Sa^2,$$

de même
$$FGH : fgh :: \overline{SF}^2 : \overline{Sf}^2;$$

or, puisque SA : S*a* :: SF : S*f*, on aura

$$ABCDE : abcde :: FGH : fgh.$$

Corollaire. Si les bases ABCDE, FGH étaient équivalentes, les sections *abcde*, *fgh* le seraient aussi.

multiplié par la somme des bases, c'est-à-dire par la base ABCDE.

Corollaire 1. Toute pyramide est le tiers du prisme de même hauteur et de base équivalente.

Corollaire 2. Deux pyramides de bases équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs, et deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

Corollaire 3. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle. Car si sur les arêtes de ces angles on construit des parallélipipèdes, ces deux corps seront entre eux comme ces produits (p. 11). Or chacun de ces tétraèdres est le sixième du parallélipipède correspondant. Donc ils sont aussi entre eux comme ces mêmes produits.

Corollaire 4. Tout polyèdre peut être décomposé en pyramides; par conséquent on saura évaluer le volume d'un polyèdre quelconque.

Fig. 182. *Définition XXI.* On appelle *tronc* de pyramide la partie comprise entre la base ABCDE d'une pyramide, et un plan *abcde* parallèle à cette base. Les polygones semblables ABCDE, *abcde* sont les *bases* du tronc; la perpendiculaire menée entre ces deux bases est la *hauteur* du tronc.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Le tronc de pyramide est égal à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune celle du tronc et pour bases, l'une la base inférieure, l'autre la base supérieure, la troisième une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Fig. 182. Soit SABCDE la pyramide entière, *abcde* la base supérieure. Sur le plan de la base ABCDE soit pris un triangle FGH équivalent à cette base. Prenons ce triangle pour base d'une pyramide SFGH qui ait son sommet en S; cette nouvelle pyramide sera équivalente à la pyramide donnée,

comme ayant base équivalente et même hauteur (p. 15, c. 2). Mais si l'on prolonge le plan de la base *abcde*, il coupera le tétraèdre SFGH suivant un triangle *fgh* équivalent à *abcde* (p. 13, c.). Les deux pyramides partielles S*abcde*, S*fgh* ont donc aussi la même hauteur et des bases équivalentes; elles sont donc équivalentes. Donc, si des pyramides totales qui le sont aussi, on ôte les deux petites pyramides, les deux troncs ABD*abd*, FGH*fgh* sont aussi égaux en volume. Par conséquent tout tronc de pyramide ABD*abd* peut être transformé en un tronc de tétraèdre de même volume, ayant la même hauteur et des bases respectivement équivalentes. Il suffit donc de démontrer la proposition actuelle pour le cas du tronc de tétraèdre.

Soit ABCDEF un tronc de tétraèdre. Par les trois points A, E, C faites passer un plan qui détachera du tronc le tétraèdre EABC ayant pour base la base inférieure ABC du tronc, et pour hauteur celle du tronc, puisque le sommet E se trouve sur le plan DEF; c'est le premier tétraèdre demandé. Reste la pyramide quadrangulaire qui a pour sommet le point E, et pour base le trapèze DACF. Par les trois points D, E, C on fera passer un plan qui décomposera cette pyramide dans les deux tétraèdres EDFC, EDAC. Le tétraèdre EDFC peut être considéré comme ayant pour base le triangle EDF, base supérieure du tronc, pour sommet le point C, et par conséquent pour hauteur celle du tronc. C'est le second tétraèdre demandé. Quant au dernier EDAC, pour le transformer, on mènera du point E la droite EG parallèle à DA. Cette droite EG sera parallèle au plan DAC (l. 5, p. 8), et par suite partout également distante de ce plan (l. 5, p. 8, c.). Par conséquent le tétraèdre GADC qui a pour base le triangle ADC et pour sommet le point G, et le tétraèdre EDAC, auront même base ADC et même hauteur, et seront équivalents (p. 14). Mais le nouveau tétraèdre GADC peut être considéré comme ayant pour som- Fig. 185.

met le point D, et pour base AGC; il a donc même hauteur que le tronc, et je dis que la base AGC est moyenne proportionnelle entre les bases ABC, DEF.

En effet, menez GH parallèle à BC; cette ligne sera aussi parallèle à EF (l. 5, p. 7, c.); les droites AG, DE sont égales comme parallèles entre parallèles; ainsi les deux triangles AGH, DEF sont égaux. Or, les triangles AGH, AGC ont les bases AH, AC sur une même droite, le sommet commun en G; ils ont donc même hauteur et l'on a (l. 4, p. 3, c. 1)

AGH ou DEF : AGC :: AH : AC.

Par une raison semblable, on a

AGC : ABC :: AG : AB.

Mais à cause des parallèles, on a

AH : AC :: AG : AB.

Donc les deux proportions ci-dessus ont un rapport commun et fournissent la proportion

DEF : AGC :: AGC : ABC,

laquelle prouve que la base AGC est moyenne proportionnelle entre DEF et ABC.

Remarque. Le triangle AGC a même base AC que le triangle ABC, et même hauteur que AGH ou DEF.

Définition XXII. Un prisme que l'on coupe par un plan non parallèle aux bases, mais rencontrant toutes les arêtes latérales, se trouve décomposé en deux parties qu'on nomme des *troncs* de prisme.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Fig. 186. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire* ABCDEF *est égal à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une quelconque des deux bases du tronc, et pour sommets les trois sommets de l'autre base.*

Par les trois points E, A, C faites passer un plan qui dé-



tachera du tronc le tétraèdre EABC dont la base est ABC, et le sommet le point E. C'est l'un des tétraèdres demandés. Il reste la pyramide quadrangulaire EACFD ; au moyen du plan ECD on la décomposera dans les deux tétraèdres EDFC, EDAC; ce dernier est équivalent au tétraèdre BDAC, parce qu'il a même base DAC et même hauteur, les sommets E, B étant sur une parallèle au plan de la base. Mais le tétraèdre BDAC peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D ; c'est le second tétraèdre demandé. Quant au troisième tétraèdre EDFC, il est équivalent au tétraèdre BACF. Car les bases de ces deux corps sont les triangles DFC, AFC; or, ces deux triangles ont la base commune FC, et les sommets D, A sur une parallèle à cette base ; ils ont donc aussi même hauteur, et sont équivalents. Mais les sommets E, B des tétraèdres EDFC, BAFC sont aussi sur une parallèle au plan ACFD des bases; ces deux corps ont donc aussi même hauteur; donc ils sont équivalents. Si enfin on remarque que le tétraèdre FABC peut être regardé comme ayant pour base le triangle ABC et pour sommet le point F, on reconnaîtra que c'est le troisième des tétraèdres en question.

Corollaire 1. Si les arètes AD, EB, FC sont perpendiculaires au plan ABC, le volume du tronc sera égal à $ABC \times \frac{AD + EB + FC}{3}$.

Corollaire 2. Tout tronc de prisme pouvant se décomposer en troncs de prismes triangulaires, on saura calculer le volume d'un tronc de prisme quelconque.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

1° Soient d'abord deux tétraèdres symétriques ayant pour plan de symétrie une face commune ABC. Soient D, D' les sommets; Fig. 187.

puisque ces deux points sont symétriques par rapport au plan ABC, les hauteurs DE, D'E des deux tétraèdres sont égales ; ils ont d'ailleurs même base ; donc ils sont équivalents.

2° Soient en second lieu deux polyèdres symétriques quelconques ; on pourra les décomposer en un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux. A cet effet, après avoir formé un tétraèdre au moyen de quatre sommets du premier polyèdre, il suffira de prendre dans le second les sommets symétriques de ceux-là pour sommets d'un autre tétraèdre qui sera symétrique du premier (p. 3, c. 1), et lui sera équivalent. Les deux corps pouvant ainsi être considérés comme composés de parties équivalentes deux à deux, sont équivalents.

Remarque. Si les polyèdres ne sont pas convexes, les tétraèdres seront les uns additifs, les autres soustratifs.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

Les surfaces de deux polyèdres semblables sont comme les carrés des dimensions homologues ; leurs volumes sont comme les cubes de ces mêmes dimensions.

Soient A, B, C, etc., des faces de l'un des polyèdres; *a, b, c...* leurs homologues dans l'autre; nommons (A, B) l'arète supposée commune aux faces A et B; (*a, b*) l'arète commune aux faces *a, b* et ainsi de suite, on a (l. 4, p. 7)

$$A : a :: (A, B)^2 : (a, b)^2.$$

Mais on a aussi $B : b :: (A, B)^2 : (a, b)^2$.

d'où $A : a :: B : b$.

de même $:: C : c ::$, etc.

De là $A + B + C +$, etc... : $a + b + c +$, etc., $:: A : a :: (A, B)^2 : (a, b)^2 ::$, etc.

Fig. 188. Passant aux volumes, considérons deux tétraèdres directement semblables ABCD, A*bcd*, et supposons-leur l'angle trièdre en A commun, ce qui est permis, puisque les angles homologues sont égaux. Le point A étant pris pour centre



de similitude, le plan *dbc* sera parallèle à DBC (p. 6), et si l'on mène la hauteur AE qui rencontre le plan *bcd* en *e*, on a (p. 13)

$$\mathrm{AE} : \mathrm{A}e :: \mathrm{AB} : \mathrm{A}b :: \mathrm{BC} : bc,$$

ou

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{AE} : \tfrac{1}{3}\,\mathrm{A}e :: \mathrm{BC} : bc.$$

Mais on a aussi $\mathrm{BCD} : bcd :: \overline{\mathrm{BC}}^2 : \overline{bc}^2,$
multipliant, on obtient

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{AE} \times \mathrm{BCD} : \tfrac{1}{3}\,\mathrm{A}e \times bcd :: \overline{\mathrm{BC}}^3 : \overline{bc}^3.$$

Or $\frac{1}{3}\,\mathrm{AE} \times \mathrm{BCD}$, $\frac{1}{3}\,\mathrm{A}e \times bcd$ sont les volumes des tétraèdres ABCD, A*bcd*; donc ces volumes sont comme les cubes des arètes BC, *bc*, ou comme les cubes de deux dimensions homologues quelconques.

Soient enfin deux polyèdres semblables quelconques *P*, *p*; décomposons-les en tétraèdres semblables (p. 7); soient T, T', T''... ceux du premier; t, t', t'', ... leurs semblables dans le second; nommons (T, T') l'arète commune à T et T' et ainsi de suite. D'après ce qu'on vient de prouver, on a

$$T : t :: (T, T')^3 : (t, t')^3 :: T' : t' :: \text{etc.}$$

Ainsi $T + T' + \ldots : t + t' + \ldots :: (T, T')^3 : (t, t')^3,$

ou

$$P : p :: (T, T')^3 : (t, t')^3.$$

LIVRE VII.

LES SURFACES COURBES ÉLÉMENTAIRES

ET LES

VOLUMES QU'ELLES TERMINENT.

Fig. 189. *Définition 1.* On entend par *surface cylindrique* ou *cylindre*, la surface décrite par une droite indéfinie CD qui se meut en restant parallèle à une direction donnée et s'appuyant toujours sur une courbe donnée ABC, qu'on appelle la *directrice*; la droite mobile CD se nomme la *génératrice* ou l'*arète*.

Il suit de cette définition que par chaque point pris sur une surface cylindrique, on peut mener une droite qui soit tout entière sur cette surface, et se confonde avec une arète.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Fig. 189. *Les sections* DEF, D'E'F' *faites dans un cylindre par des plans parallèles entre eux, mais non parallèles aux arètes, sont des courbes égales. Les sections faites par des plans parallèles aux arètes sont des arètes.*

1° En effet, prenez sur l'une des sections trois points

D, E, F à volonté, pour former un triangle DEF. Par ces trois points menez les arêtes DD′, EE′, FF′ qui rencontreront la seconde section en des points D′, E′, F′, déterminant le triangle D′E′F′. Je dis que ce triangle est égal au triangle DEF. Car les arêtes DD′, EE′ sont parallèles (d. 1); mais les droites DE, D′E′ sont aussi parallèles comme intersections du plan DE′ par les plans parallèles DEF, D′E′F′. Ces droites DE, D′E′ sont donc aussi égales. On prouvera de même que DF = D′F′ et EF = E′F′. Ainsi les triangles DEF, D′E′F′ sont égaux. Si donc on place les points D, E sur D′, E′, et le plan DEF sur le plan D′E′F′, le point F tombera sur F′. On démontrera de même que chaque point de l'une des courbes coïncide avec un point de l'autre; par suite ces deux courbes sont égales.

2° Soit un plan HF parallèle aux arêtes et coupant la courbe DEF en des points F, E. Si du point F on mène une arète, elle est sur la surface; mais elle sera aussi dans le plan HF (l. 5, p. 8, c. 1), qui est parallèle aux arêtes; donc elle est à l'intersection du cylindre et du plan. De même, par chaque point d'intersection du plan HF et de la courbe DEF, il passe une arête située à la fois dans le plan et sur le cylindre.

Corollaire. La surface cylindrique peut aussi être engendrée par une courbe DEF qui se meut de façon que l'un de ses points D parcoure une arête DC, et que les droites DE, DF qui joignent ce point à deux autres points de la courbe se meuvent parallèlement à elles-mêmes.

Définition II. La surface cylindrique est dite *circulaire* si la directrice est une circonférence de cercle CHI; si de plus la génératrice CD est perpendiculaire au plan de ce Fig. 190.
cercle, le cylindre est appelé *cylindre droit.* Dans le cylindre circulaire, les sections parallèles à la directrice sont des cercles.



PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Fig. 190. *La surface du cylindre droit est le lieu de tous les points qui sont à égales distances d'une même droite menée par le centre du cercle directeur, et perpendiculaire au plan de ce cercle.*

Soit DFEG la circonférence directrice, B son centre; soit DC une génératrice quelconque, BA une perpendiculaire élevée au plan du cercle par son centre B; ces deux droites, perpendiculaires au même plan, sont parallèles, et par conséquent partout également distantes; leur distance est mesurée par le rayon DB. Il en est de même d'une arête quelconque. Il est évident d'ailleurs que tout point intérieur est plus rapproché de AB que les points de la surface, et que tout point extérieur est plus éloigné de la même droite AB.

Remarque. La droite AB perpendiculaire au plan du cercle directeur et menée par son centre s'appelle l'*axe* du cylindre. Faire mouvoir la droite CD autour de AB, de façon que le point D décrive la circonférence DFE, et que cette droite elle-même reste perpendiculaire au plan DFE, revient au même que de faire tourner CD autour de AB, de manière qu'elle reste parallèle à AB, et toujours à la même distance de cette droite.

Fig 191. DÉFINITION III. Une *surface conique* ou un *cône* est engendré par une droite AG'' qui se meut en passant constamment par un point D, et s'appuyant sur une courbe donnée ABC. La droite mobile AG'' est appelée *arête* ou *génératrice*, le point D est le *sommet*, la courbe ABC la *directrice*.

Chacune des deux parties DA, DG'', comptée à partir du sommet du cône, décrit une partie de cette surface, et ces parties se nomment des *nappes*.

Toute droite qui joint le sommet à un point quelconque de la surface du cône est tout entière sur la surface.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Les sections faites dans un cône par des plans parallèles sont des courbes semblables; les sections faites par des plans qui passent au sommet, sont des arêtes. Fig. 191.

Soient EFG, E'F'G', E''F''G'' des sections faites par des plans parallèles; si l'on joint le sommet D à des points quelconques E, F, etc., pris sur l'une de ces sections, on déterminera sur l'autre des points E', F', etc., homologues de ceux-là par rapport au point D, puisque les plans EFG, E'F'G' sont parallèles; il en est de même de la section E''F''G''. Donc ces courbes sont semblables. En second lieu, si par le sommet D on mène un plan DI qui rencontre en des points B, B' une courbe quelconque tracée sur le cône, les droites BD, B'D seront à la fois sur le cône et sur le plan: elles sont donc à l'intersection de ces deux surfaces.

Corollaire. Le cône peut donc être engendré par une courbe EFG qui se meut de façon qu'un de ses points décrive une droite BD, et qui varie de grandeur en restant semblable à elle-même, de manière que ses dimensions soient avec la distance FD dans un rapport donné, et que deux cordes EF, FG restent parallèles à elles-mêmes.

Définition iv. La surface conique est dite *circulaire* si la directrice ECF est une circonférence de cercle. Si de plus la droite qui joint le sommet A au centre de cette circonférence est perpendiculaire au plan de cette courbe, on dit que le cône est *droit.* Soient AE, AC, AF plusieurs arêtes d'un cône droit, et soient menés les rayons BE, BC, BF; les triangles rectangles ABE, ABC, ABF seront égaux; par conséquent, les angles EAB, CAB, etc., que les arêtes font avec AB sont égaux. Le cône droit peut donc être engendré par un côté AC*d'* un angle invariable BAC qu'on fait tourner autour de l'autre côté AB supposé immobile. Fig. 192.

Ce côté AB se nomme l'*axe* du cône. Le prolongement AC' du côté AC décrit la seconde nappe du cône.

Fig. 191. *Remarque*. Les deux nappes d'un cône quelconque sont symétriques: car l'angle trièdre DABC est symétrique de DE''F''G''. Dans le cas du cône circulaire, cette symétrie se change en égalité : car le plan mené par le sommet et par le centre du cercle directeur, perpendiculairement au plan de ce cercle, est un plan de symétrie, de sorte que le cône se confond avec son symétrique.

Fig. 193. DÉFINITION V. Une *surface de révolution* est une surface engendrée par une ligne quelconque KCL qui tourne autour d'une droite immobile AB à laquelle elle est liée invariablement. La droite AB se nomme l'*axe;* la *génératrice* KCL peut être droite ou courbe, plane ou non.

Le cylindre droit et le cône droit sont des surfaces de révolution.

Tout plan passant par l'axe est appelé plan *méridien;* les sections contenues dans ces plans sont appelées sections *méridiennes.*

Les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont nommées des sections *droites.*

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Fig. 193. *Dans toute surface de révolution, les sections droites sont des cercles qui ont leurs centres sur l'axe; les sections méridiennes sont égales entre elles.*

Soit C le point où la génératrice KCL est rencontrée par un plan perpendiculaire à l'axe; soit menée de ce point la droite CD perpendiculaire à l'axe AB; pendant que la génératrice tourne autour de AB, la droite CD décrit un plan perpendiculaire à l'axe ; d'ailleurs la distance CD ne changeant, le point C décrira dans ce plan une circonférence de cercle dont le centre est en D sur l'axe. Donc, si par DC ou par D on mène un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan coupera la surface suivant un cercle qui a pour centre le point D.

En second lieu, soient ACBI, AGBH deux sections méridiennes. Coupez les par un plan CGH perpendiculaire à l'axe; la section résultante CGH sera une circonférence de cercle; ainsi les rayons

CD, GD sont égaux. Par conséquent, si l'on fait tourner le plan ACB autour de AB, le point C de la courbe ACB viendra coïncider avec le point G ; on démontrera de même que chaque point de la section ACBI vient se confondre avec un point de la courbe AGBH; donc ces deux courbes sont égales.

Corollaire. Ainsi la surface de révolution peut être engendrée par une demi-section méridienne ACB tournant autour de l'axe. Elle peut encore être engendrée par un cercle CGH assujetti à se mouvoir de manière 1° que son centre parcoure l'axe, 2° que son plan reste perpendiculaire à cet axe, 3° que le rayon varie en sorte que la circonférence ait toujours un point commun avec la courbe méridienne, ou avec une autre courbe donnée KCL.

Remarque. L'intersection de deux surfaces de révolution qui ont même axe se compose d'une ou de plusieurs sections droites. En effet, Fig. 194.
soit AB l'axe commun, ADC, EDB des sections méridiennes situées dans un même plan, D un point commun à ces sections ; de ce point D menons DF perpendiculaire à l'axe. Pendant que le plan ADB tournera autour de l'axe, les courbes ADC, EDB décriront les deux surfaces, la droite DF décrira un plan perpendiculaire à l'axe, et le point D qui reste toujours commun aux deux méridiennes, décrit une circonférence de cercle commune aux deux surfaces. Ainsi tout point commun aux deux méridiennes décrit un cercle commun aux deux surfaces. Donc, etc.

Définition VI. La *sphère* est engendrée par un demi-cercle AGC tournant autour du diamètre AC auquel il se termine. Dans ce mouvement l'arc AGC décrit la surface de la sphère; or, les points de cet arc restent tous à la même distance du centre B; par conséquent la surface de la sphère est le lieu de tous les points qui sont à la même distance du centre. Il suit de là que si l'on fait tourner une sphère autour de son centre, la surface de cette sphère coïncide toujours avec la position qu'elle occupait avant de tourner. Fig. 195.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Toute section de la sphère par un plan est une circonférence de cercle.

Soit FGH une section de la sphère par un plan, B le Fig. 1

centre de la sphère. Si le plan FGH ne passe pas au centre, menez de ce centre B une perpendiculaire BL au plan FGH, et soit L le pied de cette perpendiculaire sur le plan; joignez le centre B à différents points H, F, G du périmètre de la section; les droites BH, BF, BG sont égales comme rayons de la sphère; par conséquent elles s'écartent également de la perpendiculaire BL, de sorte que les distances LG, LF, LH sont égales. La section HFG a donc tous ses points à la même distance du point L; par suite cette section est une circonférence de cercle qui a pour centre le point L, pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan de cette section.

Si le plan passe au centre de la sphère, la distance du centre à chaque point du contour de la section est égale au rayon de la sphère; la section est donc encore un cercle.

Corollaire 1. Les cercles dont les plans ne passent pas au centre de la sphère ont des rayons moindres que le rayon de la sphère. Car FB, rayon de la sphère, est une oblique, tandis que FL, rayon de la section, est une perpendiculaire à BL. Donc FL $<$ FB.

Les cercles dont les plans passent au centre se nomment des *grands cercles;* dans une même sphère les grands cercles sont tous égaux, comme ayant des rayons égaux. Les autres cercles sont appelés *petits cercles.*

Corollaire 2. *Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales.* Car, passant au centre, leurs plans se coupent suivant un diamètre qui divise chacun des deux cercles en deux parties égales.

Corollaire 3. *Tout grand cercle divise la sphère en deux parties égales;* car si l'on place l'un des hémisphères dans l'autre, en leur conservant ce grand cercle pour base commune, tous les points de la surface de l'un coïncideront avec la surface de l'autre, sans quoi il y aurait sur ces surfaces des points inégalement distants du centre.

Corollaire 4. Par deux points pris sur la surface de la sphère, on peut toujours faire passer un grand cercle. Car par ces deux points et par le centre de la sphère on peut mener un plan qui coupera la sphère suivant un grand cercle passant aux deux points donnés. Si ces deux points sont aux extrémités d'un diamètre, ils sont aussi en ligne droite avec le centre, et l'on pourra faire passer une infinité de plans par ces trois points. Hors ce cas, les deux points donnés et le centre de la sphère déterminent un seul plan; donc par deux points non diamétralement opposés on ne peut faire passer qu'un seul grand cercle, ce qui résulte aussi de ce que deux grands cercles se coupent toujours suivant un diamètre.

Corollaire 5. Le diamètre d'un petit cercle est, comme GH, une corde d'un grand cercle; par conséquent le diamètre d'un petit cercle est d'autant plus petit que ce petit cercle est plus éloigné du centre de la sphère.

Définition VII. Un *triangle sphérique* est la partie ABC interceptée sur la surface de la sphère par trois arcs de grand cercle AB, AC, BC, arcs qui sont appelés les *côtés* du triangle. Les angles que forment les plans de ces arcs sont ce qu'on entend par les angles du triangle. Joignons les *sommets* A, B, C au centre O de la sphère; les trois rayons AO, BO, CO détermineront un angle trièdre OABC dont les faces AOB, AOC, BOC auront pour mesure les côtés AB, AC, BC du triangle sphérique, et dont les angles trièdres sont les angles de ce triangle. Fig. 196.

En prolongeant l'arc AC pour former la circonférence entière, on obtient un second triangle ayant pour côtés les arcs AB, BC et l'arc AC′A′C; ce triangle répond à un angle trièdre dans lequel la face mesurée par ce dernier arc est plus grande qu'une demi-circonférence. On peut de même prolonger deux côtés, et même tous les trois, et former ainsi des triangles dans lesquels il y a deux ou trois côtés

plus grands qu'une demi-circonférence. Mais si on retranche chacun de ces côtés d'une circonférence entière, on retombe sur le triangle ABC dont chaque côté est moindre qu'une demi-circonférence. Par cette raison on ne s'occupera ici que des triangles qui remplissent cette dernière condition, et qu'on appellera triangles *convexes*.

Fig. 197. *Définition VIII.* Un *polygone sphérique* est formé sur la surface de la sphère par plusieurs arcs de grand cercle; tel est ABCDE. Tout angle polyèdre dont le sommet est au centre intercepte sur la sphère un polygone sphérique dont les côtés mesurent les faces de l'angle polyèdre; les angles dièdres de ce même angle polyèdres sont ce qu'on appelle les *angles du polygone*. Le polygone sphérique est dit *convexe* lorsque aucun de ses côtés prolongés ne coupe quelque autre côté entre les extrémités de celui-ci. Si donc l'angle polyèdre correspondant est convexe, le polygone sphérique l'est aussi, et réciproquement.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Dans tout polygone sphérique convexe la somme des côtés est moindre qu'une circonférence de grand cercle.

En effet, dans l'angle polyèdre correspondant la somme des faces est moindre que quatre angles droits (l. 5, p 21); donc la somme des côtés du polygone, côtés qui mesurent ces faces, est moindre qu'une circonférence, qui mesure les quatre angles droits.

PROPOSITION VII.

THÉORÈME.

Fig. 196. *Dans tout triangle sphérique* ABC *un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Car dans l'angle trièdre correspondant OABC chaque face est moindre que la somme des deux autres; donc aussi chacun des arcs AC, AB, BC qui mesurent ces faces est plus petit que la somme des deux autres.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

La plus courte ligne sur la surface de la sphère, d'un point à un autre de cette surface, est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points, si cet arc ne surpasse pas la demi-circonférence.

Pour prouver cette propriété, on démontrera les deux points suivants :

1° Si deux arcs de grand cercle ACB, AED sont égaux, la ligne la plus courte, menée sur la sphère entre les points A, B, est égale à celle qui est menée entre A et D. En effet, soit A*a*B la première de ces lignes, A*b*D la seconde. Faites tourner autour du rayon AO toute la partie de la sphère comprise entre les lignes AED, A*b*D jusqu'à ce que le plan ADO coïncide avec le plan ABO, cette partie AED*b* ne quittera pas la surface de la sphère, et comme l'arc AED = ACB, le point D viendra en B. Donc les deux arcs étant alors confondus en un seul, les lignes A*b*D, A*a*B seront égales. Car si l'une des deux était plus grande que l'autre, celle-ci serait la plus courte distance, et l'autre ne la serait pas. Fig. 198.

2° Si de deux arcs de grand cercle ACBF, AED, tous les deux moindres qu'une demi-circonférence, l'un, ACBF, est plus grand que l'autre, la plus courte distance des extrémités A, F du premier, surpassera celle des extrémités A, D du second. Pour le prouver, menez le diamètre AA', et du point D menez à ce diamètre un plan perpendiculaire DBL qui coupera la sphère en un petit cercle DGB, et l'arc ACBF en un point B. Soit L le centre de la section DGB. Les rayons BL, DL étant égaux, si l'on tirait les cordes AB, AD, elles seraient égales comme également écartées de la perpendiculaire AL; par suite les arcs ACB, AED sont égaux; donc le point F, extrémité de l'arc ACBF qui est plus grand que AED ou que ACB, tombera au delà de B par rapport à A. Mais l'arc ACBF est aussi moindre qu'une demi-circonférence; donc ce point F tombe entre B et A'. Donc enfin les points A et F tombent de différents côtés du plan BGD, et quelle que soit la plus courte ligne entre A et F, cette ligne coupera la circonférence BGD en un point G. Soit A*f*GF cette ligne. Joignez le point G au point A par un arc de grand

cercle GdA; on prouvera comme ci-dessus que cet arc est égal à l'arc AED; donc la plus courte distance de A en G, laquelle est ici par hypothèse A*f*G, est égale à la plus courte distance de A en D, qui est A*b*D; or, A*f*GF > A*f*G; donc aussi A*f*GF > A*b*D.

Fig. 199. Cela posé, soient A et B deux points pris sur une sphère, AMB l'arc de grand cercle qui les joint, cet arc ne surpassant point une demi-circonférence. Je dis qu'aucune ligne qui, tracée sur la sphère, passe par un point C pris hors de cet arc, ne saurait être la plus courte distance entre A et B. Car, soient menés les arcs de grand cercle AC, BC. Si l'arc AC était plus grand que AB, la plus courte distance de A en C serait plus grande que celle qui sépare A et B; par conséquent cette dernière ne saurait passer par C. Supposons donc l'arc AC < AB, et prenons AM = AC. Puisque chacun des trois arcs AB, AC, BC est moindre qu'une demi-circonférence, on a dans le triangle ABC (p. 7), AB < AC + CB; retranchant d'un côté AM, de l'autre son égal AC, on a MB < BC. Donc la plus courte distance de A en M est égale à celle qui va de A en C; mais celle qui sépare les points M, B est plus courte que celle qui sépare les points C, B. Donc, quelle que soit la ligne la plus courte, elle ne saurait passer par un point C extérieur à l'arc AMB. Donc enfin elle se confond avec cet arc.

Définition ix. Le *pôle* d'un cercle de la sphère est un point de la surface sphérique, lequel est à égale distance de tous les points de la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Tout cercle d'une sphère a deux pôles situés aux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle.

Fig. 200. Soit d'abord un grand cercle DEFO, AC le diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle. Menez du point A des arcs de grand cercle AHD, AIE, AKF à différents points de la circonférence DFG, et joignez le centre B de la sphère à ces mêmes points par les rayons BD, BE, BF. Puisque AC est perpendiculaire au plan DEG, les angles ABD, ABE, ABF sont droits; donc les arcs AHD, AIE, AKF qui leur servent de mesure sont égaux entre eux, et sont d'ailleurs des quarts de cercle ou des *quadrants*. Ainsi le point A est également éloigné de tous les points de la circonférence DEG; donc il est un pôle du cercle DEG. On prouvera la même chose pour le point C.

Soit en second lieu HIKM un petit cercle, AC le diamètre per-

pendiculaire à son plan, L le point d'intersection de ce plan et du diamètre AC, point qui est le centre du cercle HKM. Menez du point A à différents points H, I, K de la circonférence HKM, les arcs de grand cercle AH, AI, AK, tirez les rayons LH, LI, LK. Les cordes AH, AI, AK seront égales comme obliques également écartées de la perpendiculaire. Donc les arcs sous tendus AH, AI, AK sont aussi égaux, et le point A est également distant de tous les points de la circonférence HIM. On prouvera la même chose pour le point C. Donc A et C sont les pôles du cercle HIM.

Corollaire 1. D'après cela on saura décrire sur la surface de la sphère des arcs de cercle aussi bien que sur un plan. Si l'on place une pointe d'un compas en A, l'autre en H, et que, sans changer l'intervalle qui sépare ces deux pointes, on fasse tourner le compas autour de A, la seconde pointe décrira la circonférence HIKM. Dans le cas où l'intervalle serait le quadrant AD, on décrirait le grand cercle DEG.

Corollaire 2. Pour tracer sur la surface d'une sphère un arc de grand cercle qui passe par deux points donnés E, F, il suffit de chercher le pôle de cet arc. A cet effet, de chacun des points E et F comme pôles, avec un intervalle d'un quadrant, on décrit sur la surface de la sphère deux arcs qui se couperont en un point A; les distances AE, AF seront des quadrants, et par suite les angles ABE, ABF seront droits; donc la droite AB sera perpendiculaire au plan BEF, et le point A sera le pôle du cercle qui passe en E et F. Il ne reste donc plus qu'à décrire du point A comme pôle avec l'intervalle d'un quadrant, un arc, qui sera l'arc demandé, passant par E et F.

Corollaire 3. S'il s'agit de mener d'un point I pris sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un arc donné EF, on décrira du point I comme pôle, avec un quadrant comme intervalle, un arc qui coupera l'arc EF prolongé s'il le faut, en un point G; de ce point G comme pôle, avec le même intervalle, on décrira l'arc IE qui sera l'arc demandé. Car IG, EG étant des quadrants, la droite BG est perpendiculaire au plan IBE; donc le plan EBG (l. 5, p. 15) l'est aussi, et réciproquement le plan IBE ou l'arc IE est perpendiculaire au plan EBF, ou à l'arc EF.

Définition x. Si l'on place au centre d'une même sphère deux angles trièdres supplémentaires (l. 5, 24), les triangles sphériques qu'ils déterminent sont dits *triangles supplémentaires*. Les angles de l'un sont les suppléments des côtés de l'autre, et réciproquement.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Dans tout triangle sphérique convexe, la somme des angles est comprise entre deux angles droits et six angles droits.

En effet, chaque angle d'un triangle sphérique convexe est moindre que deux droits; donc la somme des trois angles est moindre que six droits. De plus, chaque angle du triangle est le supplément d'un côté du triangle supplémentaire, et vaut, par conséquent, une demi-circonférence moins ce côté; par suite, la somme des trois angles du triangle vaut trois demi-circonférences, moins les trois côtés du triangle supplémentaire; or, ces trois côtés valent moins que deux demi-circonférences (p. 6); si donc de trois demi-circonférences on retranche une quantité moindre que deux demi-circonférences, le reste sera plus grand qu'une demi-circonférence. Or, si la somme des trois angles a pour mesure un arc plus grand qu'une demi-circonférence, c'est que cette somme est-elle même plus grande que deux angles droits.

Corollaire 1. La somme des angles dièdres d'un angle trièdre convexe a donc les mêmes limites.

Remarque 1. Entre ces limites on ne peut pas prendre à volonté les trois angles d'un triangle sphérique. En effet, appelons A, B, C les trois angles, D l'angle droit; les côtés du triangle supplémentaire sont $2D - A$, $2D - B$, $2D - C$, et pour que ce triangle soit possible, il faut que le plus grand de ses côtés soit moindre que la somme des deux autres (p. 7). Soit A le plus petit des trois angles A, B, C, le plus grand côté du triangle supplémentaire sera $2D - A$; donc il faut que $2D - A < 2D - B + 2D - C$,

d'où $$B + C < 2D + A.$$

Ainsi, il faut en outre que le plus petit angle A, aug-



menté de deux droits, donne une somme plus grande que la somme des deux autres. Du reste, si cette condition est remplie, la somme des angles est nécessairement moindre que six droits. La réciproque n'est pas vraie.

On voit d'après cela qu'avec trois angles tels que $A = 10^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 115^\circ$, on ne saurait former un triangle sphérique.

Remarque 2. Dans un triangle sphérique il peut y avoir deux, et même trois angles droits. Pour former un triangle dont les trois angles soient droits, on mène par le centre de la sphère trois plans perpendiculaires entre eux, tels que les plans ADCO, AEB, DEO; ces trois plans décomposent la surface de la sphère en huit triangles égaux au triangle AEO, dont les angles en A, E, O sont droits, et dont les côtés AE, EO, AO sont des quadrants. Ces triangles dont chacun est la huitième partie de la surface de la sphère, se nomment triangles *trirectangles*. L'angle trièdre correspondant, BEAO se nomme angle *trirectangle*. Fig. 200.

DÉFINITION XI. Deux triangles sphériques qui ont les côtés égaux chacun à chacun, sans pouvoir se superposer, sont appelés *symétriques*.

Pour former le symétrique d'un triangle ABC, joignez les trois sommets A, B, C au centre O de la sphère, et prolongez les rayons AO, BO, CO jusqu'à ce qu'ils coupent de nouveau la surface de la sphère en A′, B′, C′; menez les arcs de grand cercle A′C′, A′B′, B′C′; comme les angles trièdres OABC, OA′B′C′ ont tous leurs éléments égaux deux à deux, il en sera de même des triangles ABC, A′B′C′. Si d'ailleurs ces triangles pouvaient se superposer, il en serait de même des angles trièdres, qui sont symétriques (l. 5, p. 21, r. 1). Fig. 196.

Remarque. En comparant toujours les triangles sphériques avec les angles trièdres correspondants, et se rappelant ce qui a été dit aux propositions 22, 23, 24 du livre 5, on reconnaîtra que deux triangles sphérifiques sont égaux ou symétriques, s'ils ont :

1° Les trois côtés égaux chacun à chacun ;

2° Un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;

3° Un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;

4° Les trois angles égaux chacun à chacun ;

On reconnaîtra encore que : 1° deux triangles sphériques symétriques sont superposables s'ils sont isoscèles ;

2° Dans un triangle sphérique isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux et réciproquement ;

3° Que dans un même triangle sphérique le plus grand côté est opposé au plus grand angle et réciproquement.

On peut démontrer ces propriétés à peu près comme celles qui leur répondent dans le premier livre.

Définition xii. Un plan mené par un point d'une surface est dit *tangent* en ce point à la surface, s'il est tel qu'aucun autre plan, mené par le même point, ne peut, aux environs de ce point, passer entre la surface et le premier plan.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Un plan mené par un point d'une surface cylindrique ou conique droites, est tangent à la surface en ce point, s'il contient l'arête qui passe en ce point ; et la tangente à la section droite en ce même point. De plus ce plan est tangent en tous les points de cette arête.

Fig. 190. Soit K un point d'un cylindre droit, HF l'arête qui y passe, MKN la section droite, O son centre, KK' la tangente à cette section au point K : les deux droites HF, KK' déterminent un plan HK'. Si par le point K on mène un plan différent de celui-là, ce second plan contiendra l'arête HF, ou ne la contiendra pas. Dans le premier cas, il ne saurait contenir la tangente KK', et coupera le plan MKN en une droite KM différente de KK'. Cette droite KM étant une sécante au cercle KO, le coupera en un second point M, et par conséquent le plan MHF coupera encore le cylindre suivant l'arête MC : donc toute la partie du cylindre comprise entre les arêtes CM, HK sera renfermée entre ce second plan MHF et le plan HKK'; donc aux environs du point K ce second plan MHF ne passe pas entre le plan HKK' et le cylindre. Que si l'on mène par le point K un plan qui ne renferme pas l'arête HK, ce plan coupera cette arête et toutes les autres ; ainsi une partie du cylindre, aux environs du point K est comprise entre les deux plans.

Donc enfin, le plan HK' est tangent au cylindre en K. Il l'est aussi en tout autre point H de l'arête HF. Car si au point H on fait une section droite CHU, ayant son centre en A, le rayon AH sera parallèle à OK (l. 5, p. 9); si donc au point H on mène HH' parallèle à KK', cette droite HH' sera dans le plan CHU, et l'angle AHH' sera égal à OKK' (l. 5, p. 12) qui est droit; l'angle AHH' l'est donc aussi, et la droite HH' est tangente au cercle CHU. Comme cette tangente HH' est parallèle à KK', elle est dans le plan HKK'. Donc ce plan contient la tangente en H à la section droite et l'arête HF; il est donc aussi tangent en H. On raisonne de même pour tout autre point de HF.

Dans le cas du cône le raisonnement est à peu près le même (fig. 192).

Corollaire. Par tout point pris hors d'un cylindre ou d'un cône droits, on peut mener deux plans tangents. En effet, menons par le point D une section droite GEK; de ce même point D menons à cette section les deux tangentes DE, DG, et par les points de contact E, G, les deux arêtes EF, GH; les plans DEF, DGH seront les plans demandés. Fig. 201 et 202.

Si dans le cas du cône le plan de la section droite mené par le point D passe au sommet, il suffira de joindre ce point D au sommet, et de mener par ce même point D un plan perpendiculaire à la droite DA ainsi obtenue. Ce plan coupe le cône suivant deux arêtes dont chacune, avec DA, détermine un plan tangent.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Un plan KAI *mené par un point* A *de la surface d'une sphère* AB, *est tangent à la sphère en ce point, s'il est perpendiculaire au rayon* AB *mené à ce même point.* Fig. 195.

En effet, tout autre plan mené par le point A, sera oblique au rayon AB, et aura par conséquent des points plus rapprochés du centre que le point A; il coupera donc la sphère aux environs de ce point. Donc il ne saurait, autour du point A, passer entre la sphère et le plan KAI; ce dernier est donc tangent.

Corollaire 1. Le plan tangent à la sphère n'a avec la surface de celle-ci qu'un point commun, et ce point est le point de contact A. Car AB, étant perpendiculaire au

plan KAI, tout autre point K de ce plan est plus éloigné du centre B que le point A; donc tous les autres points du plan sont hors de la sphère.

Fig. 203. *Corollaire* 2. Par une droite AB qui ne rencontre pas la sphère, on peut mener deux plans tangents à cette surface. Pour le prouver, du centre O menez un plan perpendiculaire à la droite AB; ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle DGFE, et la droite AB en un point C; de ce point C menez à ce cercle deux tangentes CG, CE: je dis que les plans ACE, ACG sont tangents. En effet, joignez le centre O à chacun des points E, G où le grand cercle DGE est touché par les deux tangentes. Le plan EGC étant perpendiculaire à la droite AB, l'est aussi au plan ACG qui contient AB (l. 5, p. 15); or, OG est mené dans le plan ECG perpendiculairement à GC, intersection de ces plans; donc OG est perpendiculaire au plan ACG (l. 5, p. 16), et ce dernier plan, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OG, est tangent. De même le plan ACE.

Fig. 190. *Définition xiii.* Un *cylindre droit à bases parallèles* est le corps compris entre une surface cylindrique circulaire et deux sections DFEG, CHUI parallèles à la directrice (d. 1 et 2), sections qu'on appelle les bases du cylindre, et qui sont des circonférences de cercle.

Le cylindre droit à bases parallèles peut être engendré par un rectangle ABDC tournant autour du côté AB supposé fixe; les côtés AC, BD décrivent deux cercles égaux CHU, DFE qui sont les *bases*, le côté CD décrit la *surface latérale* du cylindre, AB est appelé la *hauteur*.

Fig. 192. *Définition xiv*. Le *cône droit à une base* est un corps AEFC compris entre une nappe d'un cône droit et une section EFC perpendiculaire à l'axe AB, section qu'on nomme la *base*.

Le cône droit à une base peut être engendré par un triangle rectangle ABC tournant autour d'un côté AB de l'angle droit. Le côté BC décrit la *base*, l'hypothénuse AC engendre la *surface latérale*, AB est appelé la hauteur, AC l'*apothème* du cône.



PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

Deux surfaces de révolution sont semblables si les sections méridiennes sont semblables, et si les axes y sont des lignes homologues. Fig. 204.
Réciproquement *toutes les surfaces semblables à une surface de révolution sont des surfaces de révolution engendrées par des méridiennes semblables tournant autour de droites homologues.*

Soit AB l'axe d'une surface de révolution, ACB la demi-courbe méridienne. D'un point O pris sur l'axe, comme centre de similitude, construisez une courbe *acb* semblable à ACB; la droite AB sera une ligne homologue commune. Si l'on fait tourner toute la figure autour AB, je dis que les deux courbes ACB, *acb* décriront des surfaces semblables ayant le point O pour centre de similitude. Car si l'on mène des rayons vecteurs OC, OC', etc., on a OC : O*c* :: OC' : O*c*' :: OC'' : O*c*''. Or pendant que la figure tourne autour de AB, ces proportions ne cessent pas de subsister, de sorte que C, C', C'', etc., ne cessent pas d'être homologues de *c*, *c*' *c*''... Donc les surfaces décrites sont semblables (l. 6, d. 16).

Réciproquement toute surface semblable à celle que décrit ACB autour de AB, est une surface de révolution pouvant être engendrée par une courbe semblable à ACB tournant autour d'une ligne homologue à AB. Car pour former une surface semblable à celle que décrit ACB, prenez sur l'axe un point quelconque O pour centre de similitude, et cherchez d'abord les points homologues à ceux d'une section méridienne ACB. A cet effet, ayant pris à volonté un point *c* comme homologue d'un point C, tirez les rayons vecteurs OC', OC'', etc., et prenez les points *c*', *c*'' de façon qu'on ait OC : O*c* :: OC' : O*c*' :: OC'' : O*c*''; les points *c*', *c*'', etc., seront homologues de C', C'' et formeront une courbe *acb* semblable à ACB. Sur une seconde section méridienne ADB prenez les points D, D' D'' respectivement sur les mêmes sections droites que C, C' C''..., de façon qu'on aura OD = OC, OD' = OC', etc., et, après avoir pris O*d* = O*c* pour conserver le rapport de similitude, cherchez les points homologues de D' D'', etc., le lieu de ces points sera une courbe *adb* égale à *acb*: car on a OD : O*d* :: OD' : O*d*' :: OD'' : O*d*''...
mais on a aussi OC : O*c* :: OC' : O*c*' :: OC'' : O*c*'';
or puisque OC = OD, O*c* = O*d*, OD' = OC', on a aussi O*d*' = O*c*', etc. Donc *adb* est égale à *acb* : donc toutes les sections faites dans la surface semblable, au moyen de plans menés par AB sont égales à *acb*, et si l'on fait tourner *acb* autour de AB, on décrira la surface.



Remarque. Au lieu des sections méridiennes on peut prendre des courbes quelconques, de sorte que deux surfaces de révolution sont semblables si elles sont engendrées par des courbes semblables tournant autour de droites homologues.

Corollaire 1. Tous les cylindres droits indéfinis sont semblables. Car dans le cylindre droit, la demi-section méridienne est une droite parallèle à l'axe, et le lieu de tous les points homologues à ceux de cette droite, par rapport à un centre de similitude situé sur l'axe sera une seconde parallèle à l'axe.

Corollaire 2. Deux cônes droits indéfinis sont semblables s'ils sont équiangles, c'est-à-dire, si la génératrice fait de part et d'autre avec l'axe le même angle.

Corollaire 3. Deux cylindres droits à bases parallèles sont semblables si les rectangles générateurs le sont, et deux cônes droits à une base sont semblables, si les triangles rectangles générateurs le sont.

Remarque. Deux cylindres quelconques indéfinis sont semblables si les courbes directrices le sont, et si une arête de l'un est homologue à une arête de l'autre, par rapport à ces deux courbes; deux cônes quelconques indéfinis sont semblables, si les directrices le sont, et si les sommets sont des points homologues par rapport à ces courbes.

Corollaire 4. Toutes les sphères sont semblables.

Définition xv. On entend par surface courbe *convexe* une surface qui se trouve tout entière d'un même côté de l'un quelconque de ses plans tangents. Le cylindre droit, le cône droit, la sphère sont terminés par des surfaces convexes (p. 11 et 12).

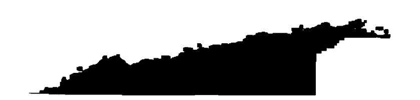
Remarque. Nous regarderons comme évidents les principes suivants :

1° *Si une aire plane et une surface courbe ou polyédrale non interrompue se terminent au même contour, l'aire plane est plus petite que la surface courbe ou polyédrale.*

2° *Si une surface convexe est enveloppée par une autre surface qui se termine au même contour, la surface enveloppée est moindre que la surface enveloppante.*

3° *De deux surfaces fermées de toutes parts, dont l'une, d'ailleurs convexe, est partout enveloppée par l'autre, la surface enveloppée est la plus petite.* Ce dernier principe est une conséquence du second.

Remarque. Dans ce qui suit, il s'agira de cylindres droits à bases parallèles et de cônes droits à une base. Pour abréger, nous appellerons ces corps simplement *cylindres droits, cônes droits.*



Définition XVI. Un *prisme inscrit* dans un cylindre droit est un prisme qui a pour bases des polygones ABC etc., A′B′C′... inscrits dans les bases du cylindre. Si ces polygones sont réguliers, le prisme est dit *régulier*. Fig. 205.

Le *prisme circonscrit* à un cylindre droit a de même pour bases des polygones circonscrits aux bases du cylindre.

Définition XVII. Un *fuseau cylindrique* est la partie de la surface convexe du cylindre, comprise entre deux arêtes.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

La surface latérale du cylindre droit est plus grande que celle d'un prisme inscrit et plus petite que celle d'un prisme circonscrit. Fig. 205.

Soient ABCD...A′B′C′D′ plusieurs faces d'un prisme inscrit dans le cylindre droit dont les bases sont les cercles AO, A′O′. Je dis que chaque face du prisme, telle que BCC′B′ est moindre que le fuseau cylindrique correspondant BmCC′m′B′. Car si le rectangle n'est pas plus petit, il sera égal ou supérieur à ce fuseau. Supposons-le d'abord supérieur; soit K la différence de ces deux surfaces, c'est-à-dire, K = BCC′B′ − Bm CC′m′B′; soit a l'aire du segment de cercle BCm. Prolongez indéfiniment les arêtes du cylindre et les faces du prisme; si l'on construit ainsi une figure dont la hauteur soit double, triple, etc., de OO′, les parties de rectangle et de cylindre comprises entre les prolongements de BB′, CC′, deviendront doubles, triples, etc.; il en sera de même de leur différence, qui deviendra double, triple, etc., de K. On pourra donc prolonger la figure suffisamment pour que cette différence devienne aussi grande qu'on voudra, et pour qu'elle devienne, par conséquent, plus grande que 2a. Pour ne pas changer de figure, supposons que la figure actuelle représente ce prolongement. On aurait donc BCC′B′ − BmCC′m′B′ > 2a ou > BCm + B′C′m′, d'où BCC′B′ > BmCC′m′B′ + BCm + B′C′m′; d'où il résulterait que la surface plane BCC′B′ serait plus grande que la surface courbe formée du fuseau cylindrique et des deux segments de cercle, surface courbe qui a les mêmes limites que la surface plane; ce qui est absurde. Donc le plan n'est pas plus grand que le fuseau cylindrique.

Supposons que le plan puisse être équivalent au fuseau. Prenez les points b, b', milieux des arcs BC, B′C′; joignez-les aux extré-

mités des mêmes arcs ; tirez aussi l'arête bb'. La somme des deux rectangles $Bbb'B'$, $bCC'b'$ a pour mesure $BB' \times (Bb + bC)$; le rectangle $BCC'B'$ a pour mesure $BB' \times BC$; or $Bb + bC$, est plus grand que BC ; donc la somme des deux rectangles Bb', bC' est plus grande que le rectangle $BCC'B'$. Mais on suppose ce dernier équivalent au fuseau $BmCB'$; donc la somme des rectangles Bb', bC' serait plus grande que ce fuseau, et chacun de ces mêmes rectangles serait plus grand que le fuseau correspondant, ce qui est impossible.

On prouvera, d'une manière analogue, que la surface convexe du cylindre est plus petite que celle du prisme circonscrit.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

La surface latérale ou convexe du cylindre droit est égale au produit de la hauteur par la circonférence de la base.

En effet, si l'on regarde la circonférence de la base comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, le cylindre lui-même peut être regardé comme un prisme droit d'une infinité de faces. Or, la surface latérale du prisme droit est égale au produit de la hauteur par le périmètre de la base. (l. 6, p. 9, c.) Donc celle du cylindre droit est aussi égale au produit de la hauteur par la circonférence de la base.

Soient P, p les périmètres de deux polygones réguliers infinitésimaux et semblables, le premier circonscrit, le second inscrit à la base du cylindre, h la hauteur commune des trois corps. La surface latérale du prisme circonscrit est $P \times h$, celle du prisme inscrit $p \times h$; la différence des deux prismes, $(P - p) \times h$, est infiniment petite, puisque $P - p$ l'est (l. 3) ; donc la surface du cylindre diffère infiniment peu de chacune de ces deux surfaces. Prenant donc la relation

$$\textit{surface du prisme circonscrit} = P \times h,$$

et négligeant les infiniment petits, on a

$$\textit{surface du cylindre} = \textit{circonférence de la base} \times \textit{hauteur}.$$

Corollaire 1. Soit r le rayon de la base, h la hauteur ; l'expression de la surface convexe est $2\pi\ r\ h$.

Corollaire 2. L'aire du fuseau cylindrique est égale à l'arc qui lui sert de base multiplié par la hauteur.

Corollaire 3. *Les surfaces convexes de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions homologues.* Car soient S, s, ces surfaces, R, r les rayons, H, h les hauteurs. Puisque les cylindres sont semblables, les rectangles générateurs le sont (p. 13, c. 3) et l'on a

$$H : h :: R : r$$

mais on a aussi $2\pi R : 2\pi r :: R : r$

d'où, multipliant $2RH \ : \ 2\pi rh :: R^2 : r^2$

ou $S : s :: R^2 : r^2$ ou $:: H^2 : h^2 ::$ etc.

Les surfaces totales, bases comprises, sont dans le même rapport.

PROPOSITION XVI.

THÉORÈME.

Le volume du cylindre droit est égal à la surface de la base multipliée par la hauteur.

Cette propriété est évidente si l'on considère encore le cylindre comme un prisme d'une infinité de faces. Car (l. 6, p. 9, c.) le volume d'un prisme est égal à la surface de la base multipliée par la hauteur.

Soient A, a, les aires de deux polygones réguliers infinitésimaux et semblables, le premier étant circonscrit, le second inscrit à la base du cylindre; h la hauteur. La différence des volumes des prismes, circonscrit et inscrit, qui ont ces polygones pour bases, est $(A - a)\,h$, quantité infiniment petite, puisque $A - a$ l'est (l. 4). Donc le cylindre compris entre les deux prismes, diffère infiniment peu de chacun de ces prismes, et si l'on prend la relation

$$\textit{volume du prisme circonscrit} = \mathrm{A} \times \mathrm{h},$$

pour y négliger les infiniment petits, on a

$$\textit{volume du cylindre} = \textit{aire de la base} \times \mathrm{h}.$$

Corollaire 1. Le rayon de la base étant r, le volume du cylindre sera $\pi r^2 h$.

Corollaire 2. L'*onglet* cylindrique est le corps compris entre un fuseau Bm CC'm'B', et les plans BB'O'O, CC'O'O menés par l'axe et par les arêtes limites du fuseau. Ce corps Fig. 205.

a pour volume le produit de sa hauteur par l'aire du secteur circulaire BmCO qui lui sert de base.

Le *segment* de cylindre est le corps compris entre un fuseau BmCC$'m'$B$'$, et le plan BCC$'$B$'$ mené par ses deux arêtes limites. Il a pour mesure le produit de la hauteur OO$'$ par l'aire du segment de cercle BCm qui lui sert de base.

Corollaire 3. Les volumes des cylindres semblables sont comme les cubes des dimensions homologues. Car si R, r sont les rayons, H, h les hauteurs, on a $H : h :: R : r$,

mais $\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2$

multipliant on a $\pi R^2 H : \pi r^2 h :: R^3 : r^3$ ou $:: H^3 : h^3$.

Définition XVIII. Une pyramide est dite *inscrite* ou *circonscrite* à un cône droit, lorsqu'elle a pour sommet celui du cône, et pour base un polygone inscrit ou circonscrit à la base du cône.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

La surface latérale du cône est plus petite que celle de toute pyramide régulière circonscrite, et plus grande que celle de toute pyramide régulière inscrite.

Pour le prouver, concevez la figure formée par le cône avec les deux pyramides, et prenant le plan des bases pour plan de symétrie, construisez une figure symétrique de la première. Vous aurez ainsi trois surfaces convexes et fermées, savoir : 1° l'ensemble des deux pyramides circonscrites ; 2° le double cône ; 3° la double pyramide inscrite. Or la première de ces figures enveloppant la seconde, sera plus grande que cette seconde figure ; donc la moitié de la première, c'est-à-dire, la surface latérale de la pyramide circonscrite, sera plus grande que la moitié de la seconde, c'est-à-dire, que la surface convexe du cône. On reconnaît de même que la surface convexe du cône est plus grande que la surface latérale de la pyramide inscrite.

PROPOSITION XVIII.

La surface convexe du cône droit est égale à la moitié de l'arête multipliée par la circonférence de la base.

Circonscrivez à la base du cône un polygone régulier infinitésimal, et joignez-en les sommets au sommet du cône; Fig. 206. vous déterminerez ainsi une pyramide régulière circonscrite. Soit FG un côté du polygone, H le point de contact; si l'on joint DH, cette droite est perpendiculaire à FG, et par suite AH est aussi perpendiculaire à FG (l. 5, p. 6); donc AH qui est l'arête du cône est aussi l'apothème de la pyramide. Mais la surface latérale de la pyramide a pour mesure la moitié de cet apothème multipliée par le périmètre de la base (l. 6, p. 10). Donc la surface du cône qui se confond avec cette pyramide si l'on considère le cercle comme un polygone infinitésimal, aura pour mesure la moitié de l'arête multipliée par la circonférence de la base.

Soient deux pyramides régulières, l'une circonscrite, l'autre inscrite, ayant pour bases des polygones infinitésimaux semblables; soit FG un côté du polygone circonscrit, BE, parallèle à FG, le côté du polygone inscrit; AH, AI seront les apothèmes des pyramides. Nommant P, p, les périmètres de leurs bases, on a pour les surfaces convexes de ces deux corps (l. 6, p. 10) $\frac{1}{2} P \times AH$, $\frac{1}{2} p . AI$. Dans ces deux produits, le facteur $\frac{1}{2} P$ diffère infiniment peu de $\frac{1}{2} p$; quant à AH et AI, leur différence est moindre que HI, qui est infiniment petit. Donc (l. 3) les deux produits diffèrent infiniment peu l'un de l'autre et de la surface du cône. On a ainsi

$$\textit{surface convexe de la pyramide circonscrite} = \tfrac{1}{2} P \times AH,$$

négligeant les infiniment petits, on a

$$\textit{surface convexe du cône} = \tfrac{1}{2} AH \times \textit{circonférence } DH.$$

Corollaire 1. Soit r le rayon de la base, c le côté; la surface du cône aura pour mesure $\frac{1}{2} c \times 2\pi r$ ou $\pi\, r.\, c$.

Corollaire 2. Le *fuseau* conique, c'est-à-dire la portion de la surface du cône, que déterminent deux arêtes quelconques, a pour mesure la moitié de l'arête multipliée par l'arc compris entre ces mêmes arêtes sur la circonférence de la base.

Corollaire 3. Les surfaces latérales ou totales de deux cônes semblables sont comme les carrés des dimensions homologues.

Fig. 207. *Définition xix.* On appelle *tronc de cône droit à bases parallèles* le corps CMBEGF compris entre la base CMB d'un cône droit, et une section FGE parallèle à la base. Ce corps peut être engendré par un trapèze HDBE, ayant des angles droits en D et H, et tournant autour du côté DH. Les droites HE, DB décrivent deux cercles qui sont les bases parallèles; la droite EB, qu'on nomme le *côté* du tronc de cône, décrit la surface *latérale*; DH en est la *hauteur*.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

La surface latérale du tronc de cône droit a pour mesure le produit du côté par la demi-somme des circonférences des bases, ou par la circonférence d'une section faite à égales distances des bases.

Fig. 207. 1° Soit le tronc de cône CMBEGF; prolongez le côté BE et la hauteur DH jusqu'à leur rencontre en A; AD sera la hauteur du cône entier, AB sera le côté de ce même cône. Au point B élevez à AB une perpendiculaire BI; supposons cette perpendiculaire égale à la longueur de la circonférence DB développée, et joignons AI; du point E soit menée la droite EK parallèle à BI. A cause des triangles semblables, on aura

$$BI : EK :: BA : EA :: BD : EH,$$

et par conséquent $:: 2\pi . BD : 2\pi . EH.$

Or, BI, par hypothèse, est égale à 2π.BD; donc EK $= 2\pi$EH..

Cela posé, le triangle ABI a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB $\times$ BI (l. 4, p. 3); la surface convexe du cône ACB est égale à $\frac{1}{2}$ AB $\times$ 2π BD (p. 18). Donc le triangle ABI est équivalent à la surface convexe du cône ACB. De même le triangle AKE est équivalent à la surface du petit cône AFE; donc le trapèze EBIK, différence des deux triangles, est équivalent à la surface du tronc de cône, différence des deux cônes. Mais le trapèze (l. 4, p. 4) a pour mesure EB $\times \frac{\text{EK} + \text{BI}}{2}$; donc la surface du tronc de cône a pour mesure son côté multiplié par la demi-somme des circonférences des bases.

2° Soit L le milieu du côté EB; de ce point L menons la droite LQ parallèle à BI, et le plan LP parallèle aux bases du tronc de cône. Le trapèze BIKE a aussi pour mesure BE $\times$ LQ (l. 4, p. 4); mais on peut prouver que LQ est égale à circonférence LO; donc la surface du tronc de cône a encore pour mesure BE $\times$ *circ.* LO ou 2π. BE. LO.

Remarque. La surface convexe du cône entier a aussi pour mesure son côté multiplié par la circonférence de la section faite à égales distances entre le sommet et la base. Car on a (p. 18) *surface* ACMB $=$ AB $\times$ $\frac{1}{2}$ *circ.* DB. Or, si par le point E, supposé au milieu de AB, on fait une section EGF, parallèle à la base CMB, on a

Circ. DB : *circ.* HE :: DB : HE :: AB : AE :: 2 : 1.

Donc *circ.* HE $= \frac{1}{2}$ *circ.* DB, et la surface du cône $=$ AB $\times$ *circ.* HE.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Le volume du cône droit est égal à la surface de la base multipliée par tiers de la hauteur.

Si l'on regarde le cercle comme un polygone infinitésimal, le cône est une pyramide qui pour mesure de son volume le produit de la base par le tiers de la hauteur (l. 6, p. 15).

Soient S, s les aires de deux polygones réguliers infinitésimaux et semblables, l'un circonscrit, l'autre inscrit à la base du cône ; les pyramides qui auront pour bases ces polygones et pour sommet le sommet du cône, auront pour volumes $\frac{1}{3}\ S.\ h$, et $\frac{1}{3}\ s.\ h$, la hauteur commune étant h. Or la différence de ces deux expressions, $\frac{1}{3}\ h \times (S - s)$, est infiniment petite ; donc la différence entre chacune de ces pyramides et le cône l'est aussi. Prenant donc la relation

$$\textit{volume de la pyramide circonscrite} = \frac{1}{3}\ S.\ h$$

et négligeant les infiniment petits on a

$$\textit{volume du cône} = \frac{1}{3}\ h \times \textit{l'aire de la base.}$$

Corollaire 1. Si r est le rayon de la base, le volume du cône est $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$.

Fig. 206. *Corollaire* 2. *L'onglet conique*, c'est-à-dire le corps intercepté dans le cône par deux plans BDA, EDA conduits suivant l'axe, a pour mesure sa base, le secteur BDE, multipliée par le tiers de AD.

Le *segment conique*, compris entre le fuseau ABHE, et le plan ABE a aussi pour mesure le produit du segment de cercle BEH, multiplié par le tiers de AD.

Corollaire 3. Les volumes des cônes semblables sont comme les cubes des dimensions homologues.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Le volume du tronc de cône droit à bases parallèles est égal à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases l'un, la base inférieure, l'autre, la base supérieure, et le troisième, une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

Démonstration 1re. Si l'on regarde le cercle comme un polygone infinitésimal, le tronc de cône devient un tronc de pyramide. Or, la propriété énoncée dans cette proposition est vraie pour ce dernier corps (l. 6, p. 16); donc elle l'est pour le tronc de cône.

2e *Démonstration*. Soient ABC, *abc*, les bases du tronc de cône, S le sommet du cône entier. Sur le plan de la base ABC soit pris un triangle DEF équivalent au cercle ABC; le tétraèdre SDEF sera équivalent au cône SABC. Prolongez le plan *abc*, et soit *def* la section qu'il fera dans le tétraèdre. O, *o* étant les points où la hauteur est coupée par les plans ABC, *abc*, on a (l. 6, p. 13) Fig. 208.

$$\text{DEF} : def :: \overline{\text{SO}}^2 : \overline{\text{So}}^2 :: \overline{\text{BO}}^2 : bo^2$$

ou

$$:: \pi\,\overline{\text{BO}}^2 : \pi\,\overline{bo}^2$$

Or $\text{DFE} = \pi.\overline{\text{BO}}^2$, donc aussi $def = \pi.\overline{bo}^2$. Par conséquent le cône S*acb* est équivalent au tétraèdre S*def*; donc aussi le tronc de cône est équivalent au tronc de tétraèdre DEF *def*, et par conséquent (l. 6, p. 16) égal à la somme de trois tétraèdres, ou de trois cônes, ayant pour hauteur commune celle du tronc, et pour bases les bases indiquées dans l'énoncé.

Corollaire 1. Soient R, r les rayons des bases; leurs surfaces seront πR^2, πr^2; la moyenne proportionnelle sera

$$\sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \pi Rr.$$

Soit h la hauteur du tronc, son volume est

$$\tfrac{1}{3} h.\pi.R^2 + \tfrac{1}{3} h\pi r^2 + \tfrac{1}{3} h\pi.Rr = \tfrac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

Remarque sur le volume du cylindre et du cône. On appelle cylindre oblique le corps terminé par une surface cylindrique circulaire

qui n'est pas droite, et par deux plans parallèles au cercle directeur. Ces plans, qui sont des cercles, sont appelés les bases du cylindre; la hauteur du cylindre est la distance de ces bases. Par un raisonnement presque identique avec celui de la proposition 16, on démontrera que le cylindre oblique a pour volume le produit de la base par la hauteur.

Le cône oblique est le corps terminé par une nappe de cône circulaire non droit, et par un plan parallèle au cercle directeur; ce plan, qui est un cercle, se nomme la base; la hauteur est la distance du sommet au plan de la base. Deux plans parallèles au cercle directeur comprennent entre eux le tronc de cône oblique. Les propositions 20 et 21 s'appliquent, la première au cône oblique, la seconde au tronc de cône oblique.

Fig. 209. *Définition* xx. Pendant que le demi-cercle AOB tournant autour du diamètre AD, décrit la sphère, un arc tel que BC décrit une surface qu'on appelle *zône sphérique;* les perpendiculaires BE, CF, abaissées des extrémités B, C de l'arc sur AD, décrivent deux cercles qu'on appelle les *bases* de la zône; EF en est la hauteur. Cette zône s'appelle *zône* à deux bases. Celle que décrit l'arc AB se nomme *zône* à une base ou *calotte;* sa hauteur est AE. La hauteur d'une zône n'est autre chose que la projection de l'arc générateur sur le diamètre AD qui sert d'axe.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Fig. 210. *Soient* AD, DC, CB, etc., *plusieurs droites contiguës, égales et également inclinées,* O *le centre du cercle inscrit au contour* ADCB; *si ce contour, situé du même côté du diamètre* AI *mené par un sommet extrême* A, *tourne autour de ce diamètre, la surface décrite a pour mesure la circonférence du cercle inscrit multipliée par la projection de* ADCB *sur l'axe* AI.

Des sommets B, C, D menez sur l'axe les perpendiculaires BB', CC', DD'. Du centre O menez sur CD la perpendicu-

laire OE qui tombera au point E, milieu de CD; de ce point E menez EF perpendiculaire à l'axe, et du point D conduisez DG parallèle au même axe. Le trapèze CC'D'D, tournant autour de AI, décrit un tronc de cône dont la surface convexe, engendrée par CD, a pour mesure le côté CD, multiplié par la circonférence qui a pour rayon EF (p. 19); désignant cette surface par *surface* CD, on a donc

$$\textit{Surface}\ CD = 2\pi . FE \times CD.$$

Or, les triangles CGD, EFO qui ont les côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables (l. 3, p. 17), et donnent $FE : DG :: OE : CD$;

d'où $FE \times CD = OE \times DG$ ou $= OE \times C'D'$.

De cette manière la surface CD devient $= 2\pi OE \times C'D'$. On prouvera de même que *surface* $BC = 2\pi\ OE \times B'C'$, et que *surface* $AD = 2\pi\ OE \times AD'$. Donc la somme de ces surfaces, ou *surface* $ADCB = 2\pi\ OE \times (AD' + D'C' + C'B')$, ou $2\pi . OE \times AB'$.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME

La surface d'une zône sphérique a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par la hauteur, et la surface de la sphère a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre.

En effet, si l'on regarde le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, la surface engendrée par une portion de ce polygone, aura, comme on l'a prouvé dans le théorème précédent, pour mesure la circonférence du cercle inscrit multipliée par la projection du contour générateur. Or, dans ce cas le cercle inscrit se confond avec le grand cercle de la sphère. S'il s'agit d'une zône à une base décrite par l'arc AB, ou d'une zône à deux bases Fig. 209.

décrite par l'arc BC, la projection du contour générateur n'est autre chose que la hauteur AE ou EF de la zône. S'il s'agit de la sphère entière décrite par la demi-circonférence ACD, la projection du contour générateur se réduit au diamètre AD. Donc toute zône a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par la hauteur, et la surface de la sphère a pour mesure la même circonférence multipliée par le diamètre.

Fig. 211. Soit d'abord une zône à une base décrite par l'arc *abcd*. Inscrivez à l'arc générateur une série de cordes égales formant le contour polygonal *abcd*; et par rapport au point O pris pour centre de similitude, circonscrivez un polygone semblable ABCD; des points *d*, D menez sur l'axe les perpendiculaires *dd'*, DD', et du centre O sur CD la perpendiculaire OE coupant *cd* en *h*. La zône décrite par *abcd* est une surface enveloppée par la surface que décrit le contour ABCD*d*, et ces deux surfaces se terminent toutes deux au plan circulaire que décrit la droite *dd'*. La zône est donc plus petite que la surface que décrit ce contour. Par une raison semblable, la zône est plus grande que la surface décrite par le contour polygonal inscrit *abcd*. Or la surface ABCD*d* se compose du tronc de cône infiniment petit décrit par D*d*, et de la surface décrite par ABCD qui a pour mesure (p. 22)... $2\pi OE \times AD'$. La surface décrite par le polygone *abcd* a pour mesure $2\pi Oh \times ad'$. Mais OE diffère infiniment peu de O*h*, AD' diffère infiniment peu de *ad'*, et le tronc de cône D*d* est infiniment petit. Donc les deux surfaces qui comprennent la zône diffèrent infiniment peu l'une de l'autre et de la zône. Prenant donc la relation

$$\text{surface } abcd = 2\pi.\ Oh \times ad'$$

et négligeant les infiniment petits, on a

$$\text{zône } abd = 2\pi.\ OE.\ ad'.$$

Soit en second lieu la zône à deux bases engendrée par l'arc LI; on a

$$\text{zône } mI = 2\pi.\ Om \times mK,$$
$$\text{zône } mL = 2\pi.\ Om \times mH,$$

retranchant, on a

$$\text{zône IL} = 2\pi.\ Om \times KH.$$

Enfin, si l'on considère les zônes engendrées par les deux arcs supplémentaires *al*, *mI*, on aura

$$\text{zône } al + \text{zône } mI = 2\pi\ Oa \times (aK + mK)$$

ou

$$\text{sphère } Oa = 2\pi\ Oa \times am.$$

Ainsi la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre.



Corollaire 1. Soit r le rayon d'une sphère, h la hauteur d'une zône; sa surface sera $2\,\pi\, r.\, h$.

La surface de la sphère sera $2\pi r \times 2r$ ou $4\pi\, r^2$. Comme le diamètre que nous nommerons d est égal à $2\, r$, on a $4 r^2 = d^2$, et l'expression de la surface de la sphère prend la forme $\pi\, d^2$.

La surface d'un grand cercle est $\pi\, r^2$, celle de la sphère est $4\,\pi r^2$; ainsi la surface de la sphère est égale à quatre grands cercles.

Corollaire 2. Si r et r' sont les rayons de deux sphères, leurs surfaces sont $4\,\pi\, r^2$, $4\,\pi\, r'^2$; or, on a

$$4\,\pi\, r^2 : 4\,\pi\, r'^2 :: r^2 : r'^2,$$

proportion qui prouve que les surfaces des sphères sont comme les carrés des rayons.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

Si un triangle tourne autour d'une droite AD *menée par son sommet* A, *et dans son plan, le corps décrit a pour mesure de son volume la surface que décrit la base multipliée par le tiers de la hauteur du triangle.* Fig. 212 et 213.

Il y a trois cas: 1° la base BC du triangle est parallèle à l'axe. Menez la hauteur AE, et du point C la droite CF parallèle à AE. Le rectangle AECF tournant autour de AD, décrit un cylindre droit qui a pour volume (p. 16, c. 1) $\pi\, \overline{AE}^2 \times EC$. D'un autre côté, le triangle rectangle ACF tournant autour de AF décrit un cône droit qui a pour volume (p. 20, c. 1) $\frac{1}{3}\,\pi\, \overline{AE}^2 \times EC$. Donc le corps décrit par le triangle AEC qui est la différence entre le rectangle AECF et le triangle ACF, aura pour mesure la différence de ces deux expressions, différence qui est $\frac{2}{3}\,\pi.\, \overline{AE}^2 \times EC$, et qui peut se mettre sous la forme $\frac{1}{3}\, AE \times 2\pi.AE \times EC$. Or $2\pi\, AE \times EC$ est la surface latérale du cylindre que décrit le rectangle AECF (p. 15, c. 1), ou Fig. 212.

bien la surface décrite par la base EC du triangle. Donc on a

$$\textit{volume}\ AEC = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ EC$$

on aura de même

$$\textit{volume}\ AEB = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ EB,$$

retranchant le premier du second, on a

$$\textit{volume}\ ABC = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ BC.$$

S'il s'agit du triangle AB'C, on ajoute les volumes des corps décrits par AEC, AB'E, et l'on a un résultat analogue.

Fig. 213. 2° L'axe AD est un côté du triangle générateur ABD. Du point B menez sur l'axe la perpendiculaire BF. Le cône décrit par le triangle ABF a pour mesure (p. 20, c. 1) $\frac{1}{3}\ \pi.\overline{BF}^2 \times AF$. Celui qu'engendre le triangle DBF a pour mesure $\frac{1}{3}\ \pi.\overline{BF}^2 \times DF$. Ainsi la somme de ces deux cônes donnera

$$\textit{volume}\ ABD = \tfrac{1}{3}\ \pi.\overline{BF}^2 \times AD$$

ou

$$= \tfrac{1}{3}\ \pi.BF \times BF \times AD.$$

Or BF × AD est le double de l'aire du triangle ABD; mais si l'on mène AE perpendiculaire à BD, le double de cette aire est aussi égal à AE × BD; donc

$$\textit{volume}\ ABD = \tfrac{1}{3}\ \pi.BF \times AE \times BD$$

$$= \tfrac{1}{3}\ AE \times \pi\ BF \times BD;$$

d'un autre côté, π.BF × BD est (p. 18, c. 1) la surface convexe du cône décrit par le triangle BFD, c'est-à-dire la surface décrite par BD; donc enfin

$$\textit{volume}\ ABD = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ BD.$$

3° Le triangle générateur ABC, tourne autour d'une droite AD qui rencontre la base BC prolongée.

On aura, d'après ce qu'on vient de prouver,

$$\textit{volume}\ ABD = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ BD,$$

$$\textit{volume}\ ACD = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ CD,$$

retranchant, on a

$$\textit{volume}\ ABC = \tfrac{1}{3}\ AE \times \textit{surface}\ BC.$$

Remarque. Soit I le milieu de BC; surface BC n'est autre chose que la surface convexe d'un tronc de cône, laquelle a pour mesure le côté BC, multiplié par la circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire IG, ou 2π.IG × BC (p. 19). Ainsi

$$volume\ ABC = \frac{2}{3}\pi . AE \times BC \times IG;$$

mais $AE \times BC = 2ABC$; donc

$$volume\ ABC = \frac{2}{3} \times 2\pi IG \times ABC = \frac{2}{3}\ circ.\ IG \times ABC;$$

ce volume est donc égal à l'aire du triangle générateur multipliée par les $\frac{2}{3}$ de la circonférence que décrit le milieu I de la base.

Si l'on joint AI, qu'on prenne AH égal à $\frac{2}{3}$ de AI, et qu'on mène HK perpendiculaire à AD, on a $HK : IG :: AH : AI :: 2 : 3$.
Ainsi $HK = \frac{2}{3}$ IG, et $2\pi.HK = \frac{2}{3} \times 2\pi.IG$, ou $circ.\ HK = \frac{2}{3}\ circ.\ IG$,
donc $volume\ ABC = ABC \times circ.\ HK$.

Ainsi *le corps décrit par le triangle* ABC *a pour mesure l'aire de ce triangle multipliée par la circonférence que décrit le point* H *pris sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base, aux deux tiers de cette ligne à partir du sommet, ou au tiers à partir de la base.*

DÉFINITION XXI. Le *secteur sphérique* est le corps décrit par un secteur circulaire AOB tournant autour d'un rayon extrême BO. L'arc AB décrit une calotte qu'on nomme la *base* du secteur. Fig. 214.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

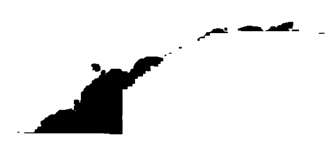
Le volume du secteur sphérique est égal à la calotte qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon, et le volume de la sphère est égal à sa surface multipliée aussi par le tiers du rayon.

1re *démonstration.* Soit le secteur de cercle AOB tournant autour de OB, et engendrant un secteur sphérique. Divisez l'arc AB en parties égales infiniment petites AC, CD, etc. Par chacun de ces points de division menez un plan perpendiculaire à BO; ces plans couperont la sphère suivant des cercles CC′C″..., DD′D″..... Considérant la circonférence que décrit le point A autour de OB, divisez-la aussi en parties égales infiniment petites aux points A, A′, A″, etc.; joignez ces points au point B par des arcs de grand cercle ACB, A′C′B, A″C″B, etc. La surface de la Fig. 214.

calotte, base du secteur, se trouvera ainsi décomposée en quadrilatères à côtés infiniment petits, tels que AA'C'C, A'A''C''C', etc., auxquels se trouve jointe la calotte infiniment petite décrite par l'arc BD. Cela fait, au point B on mène un plan tangent; on mène de même en D, D', D'' des plans tangents que l'on termine supérieurement au plan tangent en B, et latéralement chacun à son intersection avec le suivant. On fait de même en C, C', C''..., A, A', A''... Ces derniers seront terminés inférieurement au plan du cercle AA'A''. On formera ainsi une surface polyédrale circonscrite à la calotte, et différant infiniment peu de cette calotte. Joignant les sommets *a, a', a'', b, b', b''*, etc., de cette surface polyédrale au point O, centre de la sphère, on formera un polyèdre qui diffère infiniment peu du secteur sphérique. Or, ce polyèdre peut être regardé comme composé de pyramides ayant toutes pour sommets le centre O, et pour bases les faces *aa'b'b*, *bb'c'c*...; les hauteurs de ces pyramides sont toutes égales au rayon. Car puisque la face *aa'b'b* est tangente à la sphère en A', le rayon OA' sera perpendiculaire à cette face; il en est de même des autres. Chacune de ces pyramides a donc pour mesure le produit de sa base *ab'*, *a'b''*, etc., par le tiers du rayon (l. 6, p. 15), et par suite leur somme ou le polyèdre total a pour mesure la somme des bases, multipliée par le tiers du rayon. Donc le secteur sphérique a aussi pour mesure la calotte multipliée par le tiers du rayon. Rien n'empêche de supposer que l'arc AB soit une demi-circonférence, et, par conséquent, la sphère entière a pour mesure sa surface multipliée par le tiers du rayon[1].

Fig. 211. 2e *démonstration*. Soit *ad*O le secteur circulaire générateur; formez les polygones *abcd*, ABCD comme à la fin de la proposition 23. Joignez *c*O, *b*O. Le triangle *dc*O tournant autour de AO décrit un corps qui a pour mesure (p. 24) *surf. cd* $\times \frac{1}{3}$ O*h*; de même le

[1] On peut donner à ce raisonnement toute la rigueur désirable.



corps décrit par le triangle bcO a pour mesure *surf.* $bc \times \frac{1}{3}\, Oh$, et celui que décrit abO a pour expression *surf.* $ab \times \frac{1}{3}\, Oh$. Donc le corps décrit par le polygone $abcdO$ a pour volume *surf.* $abcd \times \frac{1}{3} Oh$; on aura aussi *volume* ABCDO = *surface* ABCD $\times \frac{1}{3}$ OE. Mais *surface* $abcd$ diffère infiniment peu de *surface* ABCD, et $\frac{1}{3} Oh$ de $\frac{1}{3}$OE. Donc ces deux corps diffèrent infiniment peu l'un de l'autre et du secteur sphérique adO.

On conclut de là, comme à l'ordinaire, que le *secteur* = *calotte* $\times \frac{1}{3}$ *rayon*, et que le volume de la sphère = *surface sphérique* $\times \frac{1}{3}$ *rayon*.

Corollaire 1. Soit r le rayon d'une sphère, h la hauteur d'une calotte. La surface de cette calotte sera (p. 23, c. 1) $2\pi rh$, et le volume du secteur dont elle est la base aura pour expression $\frac{1}{3} r \times 2\pi r h = \frac{2}{3} \pi r^2 h$. La surface de la sphère (p. 23, c. 1) est $4\pi r^2$; par conséquent son volume sera $4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r$, ou $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Nommant d le diamètre, on a aussi pour la surface de la sphère πd^2. Multipliant par $\frac{1}{6} d$ qui est égal à $\frac{1}{3} r$, on a pour le volume $\frac{1}{6}\pi d^3$.

Corollaire 2. Les volumes des sphères sont comme les cubes des rayons ou des diamètres.

PROPOSITION XXVI.

PROBLÈME.

Fig. 215.

Trouver le volume du corps décrit par un segment de cercle* BAE *tournant autour d'un rayon* OF *situé dans le plan du segment.

On suppose que le rayon OF qui sert d'axe ne coupe pas le segment. Menez les rayons AO, BO, et des points A, B abaissez sur OF les perpendiculaires AG, BH. Les secteurs sphériques décrits par BOF, AOF ont pour mesure, respectivement $\frac{2}{3}\pi \overline{AO}^2 \times FH$, $\frac{2}{3}\pi \overline{AO}^2 \times FG$; leur différence, ou le corps décrit par BEAO, aura pour mesure $\frac{2}{3}\pi . \overline{AO}^2 \times GH$.

Si du centre O on mène OD perpendiculaire sur AB, le corps décrit par le triangle BAO a pour mesure (p. 24), *surface* BA $\times \frac{1}{3}$ OD; mais *surface* BA $= 2\pi \cdot$ OD $\times$ GH (p. 22); donc *volume* BAO $= \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{OD}^2 \times GH$.

Retranchant le corps décrit par le triangle ABO du corps décrit par le secteur BEAO, on a

$$\textit{volume}\ BAE = \frac{2}{3}\pi(\overline{AO}^2 - \overline{OD}^2) \times GH.$$

Or, dans le triangle rectangle ADO on a $\overline{AO}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$.

Donc enfin $\quad$ *volume* $\quad BAE = \frac{1}{6}\pi \cdot \overline{AB}^2 \times GH$.

Définition xxii. Tout plan qui coupe la sphère, la divise en deux parties que l'on appelle *des segments à une base :* la base est le cercle suivant lequel la sphère est coupée.

Deux plans parallèles qui coupent la sphère interceptent entre eux un corps que l'on nomme segment à *deux bases :* les bases sont les cercles suivant lesquels ces plans coupent la sphère.

Fig. 215. Si de deux points A, B pris sur un arc dont le centre est O on mène des perpendiculaires sur un rayon FO qui ne coupe pas l'arc, et qu'on fasse tourner toute la figure autour du rayon FO, le demi-segment AFG décrit un segment de sphère à une base; la distance FG se nomme *la hauteur* du segment. La figure AEBHG tournant autour de FO décrit un segment à deux bases; AG, BH sont les rayons de ces bases, GH est la hauteur du segment.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

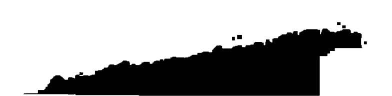
Fig. 215. *Le segment de sphère à deux bases est égal à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur, plus la sphère qui a cette hauteur pour diamètre; si le segment n'a qu'une base, il est égal à la moitié de cette base multipliée par la hauteur, plus cette même sphère.*

Soit le segment de sphère engendré par GAEBH autour du rayon FO; tirons la corde AB. Représentons, pour abréger, BH par R, AG par r, GH par h.

Le trapèze GABH tournant autour de FO décrit un tronc de cône dont le volume (p. 21, c. 1), est

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \text{ ou } \frac{1}{6}\pi h(2R^2 + 2r^2 + 2Rr)$$

Le segment de cercle BAE décrit un corps dont le volume (p. 26),



est $\frac{1}{6}\pi h\ \overline{AB}^2$. La somme de ces deux expressions donne pour le segment de sphère

$$\frac{1}{6}\pi h(2R^2 + 2r^2 + 2Rr + \overline{AB}^2)$$

Mais si du point A on mène AI perpendiculaire à BH, le triangle rectangle ABI donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 = \overline{AI}^2 + (BH - AG)^2$$

ou $$\overline{AB}^2 = h^2 + (R - r)^2 = h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr.$$

mettant pour $\overline{AB}^2$ cette valeur, le segment de sphère devient

$$\frac{1}{6}\pi h(3R^2 + 3r^2 + h^2);$$

ce qui se décompose en

$$\frac{1}{6}\pi h(3R^2 + 3r^2) + \frac{1}{6}\pi h^3;$$

cette dernière partie $\frac{1}{6}\pi h^3$ est le volume de la sphère dont h est le diamètre (p. 25, c. 1); la première est égale à $h.\frac{(\pi R^2 + \pi r^2)}{2}$, c'est-à-dire à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.

Si l'on suppose r nul, cette expression devient celle du segment sphérique à une base: elle est dans ce cas $\frac{1}{2}\pi R^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$, c'est-à-dire la moitié de la base par la hauteur, plus la sphère dont le diamètre est h.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

Le volume de la sphère est au volume du cylindre circonscrit, comme la surface de la sphère est à la surface totale du même cylindre, et comme 2 est à 3. Fig. 216

Soit ACBD le grand cercle d'une sphère, GFIH le carré circonscrit; joignez les points de contact A et B par le diamètre AB, et supposez que la figure AFCIB tourne autour de AB. Le demi-cercle ACB engendrera la sphère, et le demi-carré AFIB décrira le cylindre circonscrit. Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$ (p. 25, c. 1); mais la base du cylindre est égale au grand cercle de la sphère πr^2; la hauteur AB est un diamètre $2r$, et le volume de ce corps

est égal au produit de la base par la hauteur (p. 16), ou à $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$. Ainsi le volume de la sphère est à celui du cylindre $:: \frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3$ ou $:: \frac{4}{3} : 2 :: 4 : 6 :: 2 : 3$.

Quant aux surfaces, celle de la sphère est $4\pi r^2$ (p. 23, c. 1). Celle du cylindre est *circ*. BI $\times$ AB (p. 16), ou $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$; ajoutant à celle-ci les deux bases dont chacune est πr^2, on a pour la surface totale de ce corps $6\pi r^2$. Les deux surfaces sont donc $:: 4\pi r^2 : 6\pi r^2$ ou $:: 4 : 6$ et $:: 2 : 3$, rapport qui est aussi celui des volumes.

Remarque. Tout polyèdre dont les faces sont toutes tangentes à une sphère aura pour mesure sa surface multipliée par le tiers du rayon. Ainsi, deux polyèdres circonscrits à la sphère, et la sphère, sont entre eux comme leurs surfaces. Par exemple, si l'on considère un cylindre comme un prisme d'une infinité de faces, et un cône comme une pyramide d'une infinité de faces, on conclura que les volumes de ces corps supposés circonscrits à la sphère, et celui de la sphère sont comme leurs surfaces totales.

Fig. 217. *Définition XXIII.* La surface comprise sur la sphère entre deux demi-grands cercles ABC, ADC qui se terminent à un diamètre commun AC, se nomme un *fuseau sphérique;* les deux demi-grands cercles ABC, ADC se nomment les *faces* du fuseau. Si par le centre O de la sphère on mène un plan perpendiculaire au diamètre AC, ce plan coupe les faces suivant deux droites BO, DO dont l'angle mesure celui des faces (l. 5, p. 19); on l'appelle l'*angle* du fuseau, et l'arc de grand cercle BD qui mesure cet angle est appelé l'*arc* du fuseau.

Définition XXIV. Le corps compris entre le fuseau et ses deux faces se nomme *onglet sphérique.*

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

Le fuseau est à la surface de la sphère, comme l'onglet est au volume de la sphère, comme l'angle des faces est à quatre angles droits, et comme l'arc du fuseau est à une circonférence de grand cercle.

Soient ABC, ADC les faces du fuseau, BD son arc. Supposons que l'arc BD soit à la circonférence du grand cercle comme 3 : 16. Partagez l'arc BD en trois parties égales; la circonférence BDE en contiendra 16; si par le diamètre AC et par chacun des points de division on fait passer un plan, le fuseau ABCD sera décomposé en trois fuseaux, égaux comme répondant à des angles égaux, dans la même sphère; la surface de la sphère entière contiendra 16 de ces fuseaux; donc le fuseau ABCD est à surface de la sphère :: 3 : 16 ou :: *arc* BD : *circ*. BO. Fig. 217.

Un raisonnement semblable prouve que l'onglet ABCD est au volume de la sphère :: BD : *circ*. BO.

Si l'arc BD varie d'une manière continue, le fuseau et l'onglet varient de même. Donc les rapports précédents sont encore égaux dans le cas où BD n'est pas commensurable avec la surface de la sphère.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

L'aire du fuseau est égale à son arc multiplié par le diamètre; le volume de l'onglet est égal au fuseau multiplié par le tiers du rayon.

1° On vient de prouver que Fig. 217.

Fuseau ABCD : *surf. sphérique* :: *arc* BD : *circ*. BO.

Multipliant les termes du dernier rapport par le diamètre AC, on a

Fuseau ABCD : *surf. sph.* :: *arc* BD × AC : *circ.* BO × AC.

Or, *circ.* BO × AC est la surface de la sphère (p. 23); donc *fuseau* ABCD = *arc* BD × AC.

2° On a

Onglet ABCD : *vol. de la sphère* :: *fus.* ABCD : *surf. sph.*

Si l'on multiplie les deux derniers termes par $\frac{1}{3}$ AO, le dernier terme deviendra égal au second (p. 25); donc l'avant-dernier devient égal au premier, et l'on a

$$\textit{Onglet} = \textit{fuseau} \times \tfrac{1}{3}\ \textit{rayon}.$$

Corollaire. Soit A l'angle du fuseau, D l'angle droit, r le rayon; on aura *arc* BD : *circ.* BO :: A : 4 D : d'où

$$\textit{arc}\ \mathrm{BD} = \frac{\textit{circ.}\ \mathrm{BO} \times \mathrm{A}}{4\,\mathrm{D}} = \frac{2\,\pi\, r.\ \mathrm{A}}{4\,\mathrm{D}} = \frac{\pi\, r\, \mathrm{A}}{2\,\mathrm{D}}$$

$$\text{et } \textit{fuseau} = \frac{2\,r \times \pi\, r\, \mathrm{A}}{2\,\mathrm{D}} = \pi\, r^2\, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}.$$

$$\text{De là}\quad \textit{l'onglet} = \tfrac{1}{3}\, r \times \pi\, r^2 . \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}} = \tfrac{1}{3}\, \pi .\ r^3 . \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}$$

Définition xxv. On appelle *pyramide sphérique* le corps intercepté dans la sphère par un angle polyèdre qui a son sommet au centre. Le polygone que cet angle intercepte sur la surface de la sphère est appelé la *base* de la pyramide. Si les angles polyèdres qui interceptent deux pyramides dans des sphères égales sont symétriques, les pyramides sont aussi appelées *symétriques*.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÈME.

Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents, et deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes.

Fig. 218. Soit ABC un triangle sphérique, O le centre de la sphère;

tirez des diamètres par les points A, B, C pour déterminer le triangle A'B'C' symétrique de ABC (d. 11). Par les trois points A, B, C on pourra faire passer un plan qui coupera la sphère suivant un petit cercle; soient D, D' les pôles de ce cercle; si l'un des pôles tombe dans l'intérieur du triangle ABC, l'autre tombera dans le triangle A'B'C', puisque DOD' est un diamètre (p. 9). Menez les arcs de grand cercle DA, DC, DB, D'A', D'C', D'B'. Puisque DD', BB' sont des droites, l'arc BD = B'D', de même AD = A'D', CD = C'D'. Les angles compris par les arcs égaux sont aussi égaux. Mais le point D étant le pôle du cercle qui passe par les trois points A, B, C, les trois arcs AD, DC, BC sont égaux entre eux. Ainsi les triangles ADB, A'D'B' sont isoscèles; les angles trièdres OADB, OA'D'B' le sont donc aussi, et comme ils ont les faces égales chacune à chacune, ils sont superposables (l. 5, p. 22, r. 1); les triangles ADB, A'D'B' le sont donc aussi; de même les triangles ADC = A'D'C', BDC = B'D'C'. Donc le triangle ABC égal à la somme des triangles ADC, BDC, ADB, sera équivalent au triangle A'B C' qui est la somme des triangles A'D'C', B'D'C', A'D'B'.

Si le pôle D tombait sur un côté AB, D' tomberait sur A'B', et chacun des triangles ABC, A'B'C' se composerait de deux triangles isoscèles qui seraient égaux deux à deux, de sorte que ABC serait encore équivalent à A'B'C'.

Enfin, si les pôles tombaient hors des deux triangles, chacun d'eux, comme le triangle *abc*, se composerait de deux triangles additifs *adc*, *bdc*, et d'un troisième triangle soustractif *abd*, et la conclusion serait la même.

Quant aux pyramides OABC, OA'B'C', elles se trouvent aussi décomposées en parties superposables; car, lorsque l'angle trièdre OADC se superpose avec OA'D'C', les deux pyramides déterminées par ces angles coïncident. Donc les pyramides OABC, OA'B'C' sont équivalentes.

Corollaire. Le même raisonnement prouve aussi que les angles trièdres symétriques OABC, OA'B'C' sont équivalents.

Remarque. On a dit que le cercle qui passe par les trois points A, B, C est un petit cercle. Car si c'était un grand cercle, comme il passe par les deux points A, B, par lesquels on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle, l'arc AB se confondrait avec ce cercle (p. 5, c. 4), de même que les arcs BC, AC; donc le triangle ABC se changerait en un arc de grand cercle, ce qui n'est pas.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

Fig. 219. *Un triangle sphérique* ABC *est au triangle trirectangle comme la pyramide* OABC *qui a pour base le premier triangle est à celle qui a pour base le second, et comme la somme des angles* A, B, C *du triangle* ABC, *diminuée de deux angles droits, est à un angle droit.*

Prolongez le côté AC pour achever le grand cercle dont il fait partie; prolongez aussi les côtés AB, CB jusqu'à la rencontre de ce cercle en D et E; les arcs ABD, CBE seront des demi-cercles (p. 5, c. 2); et par suite AOD, COE seront des diamètres. Nommons D l'angle droit, r le rayon de la sphère.

Les deux triangles ABC, BCD forment ensemble le fuseau ABDC dont l'angle est A, et l'aire (p. 80, c.) $\pi r^2 . \frac{A}{D}$; les deux triangles ABC, ABE forment le fuseau CAEB dont l'angle est C et l'aire $\pi r^2 . \frac{C}{D}$; enfin, si l'on prolonge les arcs BE, BD jusqu'au rayon BO prolongé en B', le triangle B'ED, symétrique de ABC, forme avec BED le fuseau BDB'E, dont l'angle est B, et l'aire $\pi r^2 . \frac{B}{D}$; mais B'ED es

équivalent à son symétrique ABC (p. 31); donc

$$ABC + BED = \pi r^2 . \frac{B}{D}$$

d'ailleurs $$ABC + ABE = \pi r^2 . \frac{C}{D}$$

et $$ABC + BCD = \pi r^2 . \frac{A}{D}$$

Si l'on ajoute ces six triangles, leur somme formera la demi-sphère, plus 2 fois le triangle ABC; or, la demi-sphère vaut (p. 23, c. 1) $2 \pi r^2$.

Donc $$2\,ABC + 2 \pi r^2 = \pi r^2 \left(\frac{A + B + C}{D}\right);$$

puis

$$2ABC = \pi r^2 \left(\frac{A + B + C}{D} - 2\right) = \pi r^2 \left(\frac{A + B + C - 2D}{D}\right)$$

et $$ABC = \frac{1}{2} \pi r^2 \left(\frac{A + B + C - 2D}{D}\right).$$

Mais $\frac{1}{2} \pi r^2$ est le huitième de la surface sphérique, c'est-à-dire le triangle trirectangle; si on le nomme T, on aura ABC : T :: A + B + C − 2 D : D.

Passons à la pyramide. Les pyramides OABC, OBCD forment l'onglet dont l'angle est A et le volume $\frac{1}{3} \pi r^3 . \frac{A}{D}$ (p. 30, c.); les deux pyramides OABC, OABE forment l'onglet CAEB qui a pour mesure $\frac{1}{3} \pi r^3 . \frac{C}{D}$; enfin OABC ou sa symétrique OEDB', forme avec OBDE l'onglet BDB'E, qui a pour mesure $\frac{1}{3} \pi r^3 . \frac{B}{D}$.

Or, la somme de ces six pyramides contient deux fois OABC plus la demi-sphère dont le volume est $\frac{2}{3} \pi r^3$ (p. 25, c. 1); donc

$$2\ \mathrm{OABC} + \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^3\left(\frac{A+B+C}{D}\right)$$

d'où $$\mathrm{OABC} = \tfrac{1}{6}\pi r^3\left(\frac{A+B+C-2D}{D}\right).$$

Mais $\frac{1}{6}\pi r^3$ est le huitième du volume de la sphère; c'est donc le volume de la pyramide trirectangle; nommons celle-ci P, nous aurons

$$\mathrm{OABC} : P :: A+B+C-2D : D.$$ Donc, etc.

Corollaire 1. Le volume de la pyramide OABC qui est $\frac{1}{6}\pi r^3\left(\frac{A+B+C-2D}{D}\right)$ peut se mettre sous la forme

$\frac{1}{3}r \times \frac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{A+B+C-2D}{D}\right)$, ou bien $\frac{1}{3}r \times$ aire ABC.

Ainsi la *pyramide sphérique triangulaire*, et par suite *toute pyramide sphérique a pour mesure le polygone sphérique qui lui sert de base multiplié par le tiers du rayon.*

L'aire du triangle se calcule d'ailleurs par la formule

$$\mathrm{ABC} = \tfrac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{A+B+C-2D}{D}\right).$$

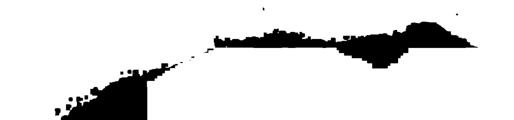
Remarque 1. *L'angle trièdre est* aussi *à l'angle trièdre trirectangle comme la somme des angles dièdres moins deux dièdres droits est à quatre dièdres droits.* En effet, un dièdre droit vaut deux trièdres trirectangles; appelons D le dièdre droit, Q le trièdre trirectangle, nous aurons $D = 2Q$.

Cela posé, les deux trièdres OABC, OBCD font ensemble le dièdre A; on a donc

Trièdre $\mathrm{OABC} + \mathrm{OBCD} = A$ ou $= 2Q \times \frac{A}{D}$

de même $\mathrm{OABC} + \mathrm{OABE} = 2Q \times \frac{C}{D}$

$\mathrm{OABC} + \mathrm{OBED} = 2Q \times \frac{B}{D}.$



La somme de ces six trièdres forme 2 fois OABC, plus 4 trièdres trirectangles;

donc $$2\,\text{OABC} + 4\,\text{Q} = 2\,\text{Q}\left(\frac{\text{A}+\text{B}+\text{C}}{\text{D}}\right)$$

de là $$\text{OABC} = \text{Q}\left(\frac{\text{A}+\text{B}+\text{C}-2\,\text{D}}{\text{D}}\right)$$

d'où $$\text{OABC} : \text{Q} :: \text{A}+\text{B}+\text{C}-2\,\text{D} : \text{D}.$$

Remarque 2. Les résultats démontrés ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\text{ABC}}{\text{T}} = \frac{\textit{pyr. }\text{OABC}}{\text{P}} = \frac{\textit{trièdre }\text{OABC}}{\text{Q}} = \frac{\text{A}+\text{B}+\text{C}-2\,\text{D}}{\text{D}}$$

Si donc on prend 1° pour unité de surface le triangle trirectangle; 2° pour unité de volume la pyramide trirectangle; 3° pour unité d'angle polyèdre le trièdre trirectangle; 4° pour unité d'angle dièdre ou plan l'angle droit: on peut dire que le *triangle sphérique, la pyramide sphérique, l'angle trièdre ont pour mesure la somme des trois angles du triangle diminuée de deux unités.*

Soit s la somme des angles d'un polygone sphérique, en prenant l'angle droit pour unité: soit n le nombre des côtés de ce polygone; comme on peut le diviser en n triangles ayant pour sommet commun un point intérieur au polygone, la somme des angles de ces triangles est égale à $s+4$; si de cette somme on retranche deux unités autant de fois qu'il y a de triangles, on aura $s+4-2n$ pour la mesure du polygone, de la pyramide et de l'angle polyèdre, en adoptant les mêmes unités.

Remarque 3. On a trouvé que le fuseau dont l'angle est A, a pour mesure (p. 30, c.) $\pi r^2 . \frac{\text{A}}{\text{D}}$ ou $\text{T}\,\frac{2\,\text{A}}{\text{D}}$; si l'on prend T pour unité de surface, D pour unité d'angle, on a pour le fuseau 2 A. Même résultat pour l'onglet en prenant Q pour unité de volume.

Problèmes numériques.

1° Calculer à $\frac{1}{1,000,000}$ de mètre cube près le volume d'une pyramide sphérique dont la base triangulaire a pour angles A = 125°, B = 96°, C = 85°, le rayon de la sphère étant $0^m,14$.

La somme des trois angles donnés est 306°; elle est comprise entre 180° et 540° (p. 10); de plus, le plus petit angle 85°, augmenté de 180° donne 265, quantité plus grande que la somme 221° des deux autres angles. Le triangle, base de la pyramide, est donc possible (p. 10, r.).

La formule à employer est

$$\tfrac{1}{6}\pi r^3 . \frac{A+B+C-2D}{D};$$

elle devient ici

$$\tfrac{1}{6}\pi (0^m,14)^3 . \frac{126}{90} = \pi \times 0,002744 \times \frac{7}{30}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi . 0,0019208.$$

Pour savoir combien il faut prendre de chiffres dans π, appelons K et $K+\alpha$ deux nombres qui comprennent π; la pyramide sera comprise entre

$$\frac{0,0019208}{3}(K+\alpha) \text{ et } \frac{0,0019208\ K}{3},$$

quantités dont la différence est $\frac{0,0019208\ \alpha}{3}$; posons donc

$$\frac{0,0019208\ \alpha}{3} < 0,000001,$$

d'où
$$\alpha < \frac{30}{19208}.$$

A cet effet il suffit de prendre $\alpha < \frac{1}{641}$, et *à fortiori* suffira-t-il de prendre $\pi = 3,141$, où l'on aura $\alpha < \frac{1}{1000}$.

Le calcul donne $\frac{1}{3}\times 3{,}141\times 0{,}0019208 = 0{,}0020110776$.

En se bornant aux six chiffres demandés, on a 0,002011 et l'on commet sur le produit obtenu une erreur égale à 776 unités du dixème ordre décimal ; l'erreur qui provient de π, où l'on a négligé moins que 6 dix millièmes, cette erreur, dis-je, est moindre que

$$\frac{1}{3}\times 0{,}0006\times 0{,}0019208, \text{ ou que } 0{,}00000038416;$$

nombre qui ajouté aux 776 unités du dixième ordre, donne pour limite totale de l'erreur 0,00000046176, quantité moindre que 0,000001.

Donc, en effet, à moins de 0,000001, on a pour le volume de la pyramide $0^{m^3},002011$; ce nombre est même exact à moins de 0,0000005.

Actuellement, remarquons que le mètre se divisant en dix décimètres, le mètre cube, mesuré en décimètres cubes, vaudra 1000 (p. 11, c. 2), ce qui provient encore de ce que les volumes de deux corps semblables sont comme les cubes des dimensions homologues. Par conséquent les millièmes du mètre cube sont des décimètres cubes. De même les millionièmes sont des centimètres cubes, les billionièmes sont des millimètres cubes. Donc le nombre trouvé ci-dessus vaut 2 décimètres cubes et 11 centimètres cubes.

2° Dans un triangle sphérique les trois angles sont $A = 135° + 12'$, $B = 116° + 10'$, $C = 82° + 14'$; le volume de la pyramide qui s'appuie sur ce triangle est $0^{m^3},9275$, à moins de $0^{m^3},0001$, en moins ; avec quelle approximation pourra-t-on calculer le rayon de la sphère ?

Soit r le rayon de la sphère ; on a

$$\frac{A+B+C-180°}{90°}=\frac{153°+36'}{90°}=\frac{768}{450}=\frac{128}{75}.$$

Ainsi $\frac{1}{6}\pi r^3\times\frac{128}{75}$ ou $\frac{64}{225}\pi r^3 > 0{,}9275$

$< 0{,}9276$

d'où
$$r^3 > \frac{208,6875}{64\pi}$$
$$\text{et} < \frac{208,7100}{64\pi}$$

Soient encore K et K + α deux limites de π...; *à fortiori*
$$r^3 > \frac{208,6875}{64\,(K+\alpha)},$$
$$r^3 < \frac{208,7100}{64\,K};$$
la différence de ces deux limites mesure l'approximation de r^3. Cette différence est $\frac{0,0225\,K + 208,7100\,\alpha}{64\,K\,(K+\alpha)}$; je la représente par d.

On voit que, quelque petit qu'on prenne α, on ne pourra jamais rendre cette différence moindre que $\frac{0,0225\pi}{64\,\pi^2}$ ou $\frac{225}{640000\,\pi}$. Cette limite est moindre que $\frac{225}{640000 \times 3}$ ou $\frac{3}{25600}$ ou que $\frac{1}{8533}$; elle est plus grande que
$$\frac{225}{640000 \times 3,2} = \frac{9}{81920} \text{ qui est un peu plus grand que } \frac{1}{9103}$$
Ainsi on ne saurait avoir r^3 à moins de $\frac{1}{9103}$, mais on peut l'avoir à moins de $\frac{1}{8533}$

Actuellement, si deux nombres diffèrent de $\frac{1}{8533}$ ou de $\frac{1}{9103}$, de combien diffèrent leurs racines cubiques ?

Soient n, $n + x$ les racines cubiques; on a
$$(n+x)^3 - n^3 = \frac{1}{8533} \text{ et } (n+x)^3 - n^3 = \frac{1}{9103}, \text{ ou}$$
$$x^3 + 3nx^2 + 3n^2x - \frac{1}{8533} = 0;\ x^3 + 3nx^2 + 3n^2x - \frac{1}{9103} = 0$$
si l'on diminue n, la valeur positive de x augmentera et réciproquement; or l'inégalité
$$r^3 > \frac{208,6875}{64\,\pi} \text{ ou} > \frac{208,6875}{64 \times 3,1416} \text{ donne } r > 0,9;$$
de même $r < 1,1$.

Ainsi l'équation $x^3 + 3 \times 0,9\,.\,x^2 + 3 \times (0,9)^2\,x - \frac{1}{8533} = 0$, donnera une valeur trop grande et $x^3 + 3 \times 1,1\,x^2 + 3\,(1,1)^2\,x - \frac{1}{9103} = 0$ donnera une valeur trop petite.



La première de ces équations a pour limite supérieure $\frac{1}{20555}$, la seconde a pour limite inférieure $\frac{1}{32862}$; la mesure de l'approximation possible est renfermée entre ces deux fractions.

Proposons-nous, par exemple, chercher r à moins de $\frac{1}{100}$ près.

La différence des cubes sera $\left(n + \frac{1}{100}\right)^3 - n^3$, ou

$$0,000001 + 0,0003 \, . \, n + 0,03n^2 \, .$$

Mettant pour n une valeur trop petite, savoir, 0,9, on a

$$0,000001 + 0,00027 + 0,0243$$
$$= 0,024571$$

Ainsi il suffit que les cubes diffèrent de cette quantité ou d'une quantité moindre.

Prenons pour limite 0,01, et cherchons combien il faut employer de décimales dans π pour obtenir r^3 avec cette approximation-là.

On posera donc $d < 0,01$

ou $$\frac{225 \text{ K} + 2087100 \alpha}{6400\text{K } (\text{K} + \alpha)} < 1$$

remplaçons au numérateur K par 3,2, au dénominateur K et $\text{K} + \alpha$ par 3; il viendra

$$72 + 208710 \alpha < 640 \times 9$$
$$\text{ou} \quad 4 + 11595 \alpha < 320$$
$$\text{et} \quad \alpha < \frac{316}{11595} < \frac{1}{36}$$

Il suffira donc de prendre π avec deux décimales.

On trouve ainsi $r^3 < \frac{20871}{6400 \times 3,14}$ et $> \frac{2086876}{640000 \times 3,15}$

$r^3 < 1,038515$ quotient pris en plus
et $> 1,035156$ *id.* en moins,

la première limite donne $r < 1,02$ racine prise en plus
la seconde $r > 1,01$ *id.* en moins.

Voilà les valeurs de r à moins de 0,01 près.

3° Trouver à moins de $0^m,1$ le rayon d'une sphère dont le volume est de 288^{m^3}.

1re *Solution.* On a $\frac{4}{3} \pi r^3 = 288$, d'où $r^3 = \frac{216}{\pi}$

Or, pour que r soit connu à moins de $0^m,1$, il suffit que

r^3 le soit à moins de 0,001. Soient $k, k + \alpha$ deux nombres qui comprennent π.

On posera

$$\frac{216}{k} - \frac{216}{k+\alpha} < 0{,}001 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{216\,\alpha}{k\,(k+\alpha} < 0{,}001.$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite, il suffit que l'on ait

$$\frac{216\,\alpha}{9} < 0{,}001,$$

ou $$24\,\alpha < 0{,}001 \text{ et } \alpha < 0{,}00004.$$

On prendra donc $\pi = 3{,}14159$ ou $\pi = 3{,}416$,

Et l'on aura

$$r^3 < \frac{216}{3{,}14159} \text{ ou } < 68{,}755 \text{ quotient pris en plus}$$

$$r^3 > \frac{216}{3{,}1416} \qquad > 68{,}754 \text{ qnotient pris en moins.}$$

On trouve ainsi $r < 4^m{,}1$ et $r > 4^m{,}09$.

On a trouvé pour r^3 deux limites qui ne diffèrent, en effet, que de 0,001; cela tient à ce que les valeurs de π au lieu de n'être exactes qu'à 0,0004 comme cela suffit, le sont à moins de 0,000003, puisque $\pi = 3{,}1415926$, etc.

2e *Solution*. Puisque $r^3 = \frac{216}{\pi}$, on a $r^3 < 72$ et $r^3 > 54$, de sorte que r est entre 3 et 5. Cela posé, soient n et $n + o, 1$ deux valeurs qui comprennent r; on aura

$$(n + 0{,}1)^3 - n^3 = 0{,}001 + 0{,}03.\,n + 0{,}3\,n^3$$

et comme $n > 3$, cette différence est $> 0{,}001 + 0{,}09 + 2{,}7 = 2{,}791$. Ainsi, pour que les valeurs de r diffèrent de moins que 0,1, il suffit que celles de r^3 diffèrent de moins que 2,791.

Posons donc $$\frac{216}{k} - \frac{216}{k+\alpha} < 2{,}791,$$

ou $$\frac{216\,\alpha}{9} < 2{,}791.$$

d'où $$\alpha < 0{,}11.$$

Donc on peut prendre $\pi = 3{,}1$.



et l'on a $r^3 < \frac{2160}{31}$ ou $< 69{,}678$ quotient en plus

$r^3 > \frac{2160}{32}$ ou $> 67{,}5$ quotient en moins.

Ces valeurs diffèrent, en effet, de moins que 2,791 ; ainsi leurs racines cubiques exactes différeront de moins que 0,1; mais leurs racines approchées la première en plus et la seconde en moins sont $r < 4{,}2$ et $r > 4{,}0$. Il ne suffit pas de pousser la racine cubique jusqu'aux centièmes; la question reste encore indécise; mais si l'on prend π avec une décimale de plus, on trouve

$$r^3 < 68{,}790 \text{ et } r^3 > 68{,}571,$$

nombres dont les racines cubiques sont 4,1 pour le premier en plus, et 4,0 pour le second en moins.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLÈME.

Étant donnés trois des six éléments d'un triangle sphérique, trouver par des constructions planes, les trois autres.

Au lieu du triangle sphérique on considérera l'angle trièdre qui, ayant son sommet au centre de la sphère, intercepte ce triangle.

Soient A, B, C les trois faces, a, b, c les dièdres opposés ou les angles plans qui mesurent ces dièdres. La question présente six cas dont voici le tableau :

Étant donnés	1° A, B, C	on demande	a, b, c.
	2° A, B, c		a, b, C.
	3° A, B, a		b, c, C.
	4° A, a, c		b, B, C.
	5° A, b, c		a, B, C.
	6° a, b, c		A, B, C.

Au moyen du trièdre supplémentaire, les trois derniers cas se ramènent aux trois premiers. En effet, supposons qu'on sache résoudre le premier cas, et qu'il s'agisse de résoudre le sixième. On construira un trièdre qui ait pour faces $A' = 180 - a$, $B' = 180 - b$, $C' = 180 - c$; soient a', b', c' les dièdres opposés que nous supposerons trouvés. On aura aussi (l. 5, p. 24)

$$A = 180 - a', B = 180 - b', C = 180 - c';$$

Donc, des trois angles a, b, c on pourra déduire les trois faces A, B, C.

De même, le cinquième cas se ramène au deuxième, le quatrième au troisième. Il suffit donc de résoudre les trois premiers.

17.

1° *Connaissant* A, B, C, *trouver* a, b, c.

Fig. 220. Soit SABC l'angle trièdre. Si les faces CSA, CSB étaient des angles droits, la droite CS serait perpendiculaire au plan BSA, les angles dièdres SA, SB seraient droits, et la face ASB mesurerait le dièdre SC. Ce cas ne donne donc lieu à aucune construction et nous en ferons abstraction.

D'un point C, pris à volonté sur l'arête CS, menez à AS et BS des plans perpendiculaires, le premier coupera la face CSA suivant une droite CA perpendiculaire à SA, et la face BSA suivant AD également perpendiculaire à SA; l'angle CAD mesurera le dièdre SA. Le second plan, celui qui est perpendiculaire à BS, détermine de même l'angle CBD, mesure du dièdre BS, et l'intersection de ces deux plans CAD, CBD sera une droite CD, perpendiculaire au plan ASB. Pour avoir sur la même figure la mesure du troisième dièdre on peut mener par le point C un plan perpendiculaire à l'arête CS, lequel coupera les faces suivant les trois droites EC, CF, EF, dont les deux premières comprennent l'angle cherché. Ainsi, il suffira de construire les trois triangles CAD, CBD, CEF.

A cet effet, soient pris sur un plan les trois angles C'S'A', A'S'B', B'S'C' respectivement égaux aux faces CSA, ASB, BSC; supposons la face ASB placée sur A'S'B', et ouvrant l'angle trièdre dans l'arête CS, faisons tourner le plan CAS autour de A'S' pour le placer en A'S'C', et le plan CSB en B'S'C'', de sorte qu'on aura CS = C'S' = C''S', C'A' = CA, A'D' = AD, D'B' = DB, etc.; ou ce qui revient au même prenant C'S' = C''S' = CS qui est arbitraire, menons C'A', C''B' perpendiculaires à S'A' et S'B'. Pour construire le triangle CAD, on a l'hypothénuse C'A' = CA, le côté A'D' = AD; on le construira donc en faisant l'angle droit A'D'*c*, décrivant de A' avec le rayon A'C' un arc qui coupe la perpendiculaire D'*c* en un point *c*, et joignant A'*c*; l'angle *c*A'D' sera égal à CAD. De même, avec le côté D'B' qui = DB, et l'hypothénuse B'C'' = BC, on construit le triangle rectangle D'B'*c*', dans lequel l'angle D'B'*c*' est égal à DBC.

Pour construire le triangle CEF, on remarquera que dans le développement du trièdre le côté CE, perpendiculaire à CS, se confondra avec C'E', perpendiculaire à C'S', le côté CF avec C''F', perpendiculaire à C''S', et par suite le côté EF avec E'F'. Avec les trois côtés C'E', E'F', F'C'' on construira donc le triangle *c*''E'F' qui sera égal à CEF; par conséquent, *c*'' est la mesure du troisième dièdre CS.

Si la perpendiculaire CD tombe sur le prolongement de DA au delà de A par rapport à D, le triangle CAD ne renferme plus la mesure du dièdre AS, mais bien son supplément. C'est aussi ce que donnera le triangle *c*A'D'.

2° *Connaissant deux faces* B′S′A′, A′S′C′ et *le dièdre compris, trouver les autres éléments.*

Menez à volonté une droite C′D′ perpendiculaire à S′A′; au point A′ faites l'angle cA′D′ égal à la mesure du dièdre donné; prenez cA′ = C′A′, menez cD′ perpendiculaire à A′D′; du point D′ menez sur S′B′ la perpendiculaire indéfinie D′B′, et coupez-la par un arc de cercle décrit du point S′ comme centre avec le rayon C′S′; soit C″ le point d'intersection; tirez C″S′, l'angle C″S′B′ sera la troisième face. Car si au moyen des trois faces C′S′A′, A′S′B′, B′S′C″ on cherche, au moyen du premier cas, les dièdres, on trouvera cA′D′. Rien n'empêche de trouver maintenant les dièdres c′B′D′ et c″. Fig. 220.

3° *Connaissant deux faces* A, B, *et le dièdre* a *opposé à l'une de ces faces, trouver le reste.*

Soit SABC le trièdre, CSA, BSA les faces données; on connaît de plus le dièdre opposé à CSA. Par un point A pris à volonté sur AS, on mènera deux plans; le premier ABE perpendiculaire à l'arête BS, le second ADE perpendiculaire à AS. Ces deux plans, tous les deux perpendiculaires au plan BSA, se couperont suivant une droite AE perpendiculaire à ce plan BSA. Le plan ABE, perpendiculaire à BS, déterminera l'angle EBA, mesure du dièdre BS; ainsi dans le triangle ABE on connaîtra le côté AB, l'angle en B et l'angle droit en A; on trouvera donc le côté AE. On connaît AD; donc on pourra construire le triangle ADE rectangle en A, ce qui fera connaître l'angle ADE. Dès lors, dans le triangle ADC on connaîtra les côtés AD, AC, et l'angle ADE opposé à ce dernier, et l'on pourra construire DC. Enfin, DC, SC, SD détermineront la troisième face DSC. Fig. 221.

Soit donc A′S′C′ = ASC, A′S′B′ = ASB. Supposant A′S′ = AS, élevez A′C′ perpendiculaire à A′S′, et prolongez cette ligne jusqu'à la rencontre de S′B′ en D′. On aura A′C′ = AC, A′D′ = AD, D′S′ = DS, C′S′ = CS. Du même point A′ on mènera A′B′ perpendiculaire à D′S′, et l'on aura A′B′ = AB. Au point B′ on fera l'angle A′B′E′ = ABE, en A′ on mènera A′E′ perpendiculaire à A′B′; le triangle A′B′E′ sera égal à ABE, de sorte que A′E′ = AE. Actuellement, pour construire le triangle DAE on connaît A′D′ = AD, A′E′ = AE. Comme l'angle D′A′E″ est droit, si l'on prend A′E″ = A′E′, qu'on tire D′E″, on aura le triangle D′A′E″ égal à DAE. Ainsi, l'angle E″D′A′ sera égal à EDA; pour avoir le triangle DCA on connaît D′A′ = DA, C′A′ = CA, et ce dernier angle opposé à CA. Ainsi, du point A′, comme centre avec le rayon A′C′, on décrit un arc qui coupe D′E″ en C_1; D′C_1 sera égal à DC; puis, avec les trois côtés C′S′ = CS, D′S′ = DS et D C_1 = DC on décrit le triangle D′S′C″; l'angle D′S′C″ sera la troisième face, et la question est ramenée au premier cas.

L'angle $A'S'C'$ a été supposé plus grand que $A'S'D'$; par suite, $A'C'$ est plus grand que $A'D'$, et le triangle $A'D'C_1$ est toujours possible d'une seule manière, de même que l'angle trièdre. Si l'angle $A'S'C'$, opposé au dièdre donné, est plus petit que $A'S'D'$, le côté $A'C'$ est aussi plus petit que $A'D'$, et le triangle $A'D'C_1$ est possible de deux manières, d'une seule, ou est impossible, selon que $A'C'$ est supérieur en grandeur, égal ou inférieur à la perpendiculaire abaissée de A' sur $D'C_1$ (l. 2). Le trièdre offre donc aussi deux solutions, une seule ou est impossible.

Définition xxvi. On appelle *polyèdre régulier* tout polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers, égaux et également inclinés, et dont, par conséquent, tous les angles polyèdres sont égaux.

* PROPOSITION XXXIV.

THÉORÈME.

Il y a cinq polyèdres réguliers convexes, et il n'y en a pas plus de cinq.

Je dis d'abord qu'il n'y en a pas plus de cinq.

En effet, pour former un polyèdre régulier convexe avec des polygones réguliers égaux, il faut qu'on puisse assembler autour d'un point un certain nombre de ces polygones, de façon que la somme des angles ainsi assemblés soit moindre que quatre droits (l. 5, p. 21). Or, comme il faut au moins trois faces pour un angle polyèdre, on doit exclure tous les polygones qui ont plus de cinq côtés. Car, dans l'hexagone, chaque angle vaut 120°, et si l'on assemble trois de ces angles autour d'un point, on aura 360°, ce qui formera un plan et non pas un angle polyèdre. A plus forte raison, ne saurait-on prendre des polygones de plus de six côtés, puisque l'angle du polygone régulier augmente avec le nombre des côtés. On ne pourra donc employer que des polygones de trois, quatre ou cinq côtés. En fait de pentagones réguliers, on ne saurait en prendre plus de trois autour d'un point. Car, l'angle du pentagone régulier vaut 108°, et quatre de ces angles feront plus que 360°. On ne saurait non plus assembler plus de trois carrés autour d'un point. Quant aux triangles équilatéraux, on peut en réunir trois, quatre ou cinq; mais si l'on en prenait six, comme l'angle du triangle équilatéral vaut 60°, on aurait déjà 360°. *A fortiori*, n'en peut-on pas prendre plus de six. Donc, il n'y a pas plus de cinq polyèdres réguliers, dont trois ont pour faces des triangles, un quatrième a pour faces des carrés et le cinquième des pentagones.

Je dis, en second lieu, qu'il y a cinq polyèdres réguliers.





1° Le *tétraèdre régulier.*

Construisez un angle trièdre avec trois angles de 60° chacun : soit ABCD cet angle trièdre. Prenez les trois arêtes AB, AC, AD égales entre elles, et joignez BD, DC, CB ; le tétraèdre régulier sera formé. Car, le triangle ABC est isoscèle, puisque AB = AC, et comme l'angle en A est de 60°, il est équilatéral; il en est de même des triangles ACD, ABD ; par conséquent, BCD est aussi un triangle équilatéral. Ainsi, le tétraèdre est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux; d'ailleurs, les angles dièdres sont égaux. En effet, les deux angles trièdres D et A sont égaux comme composés de faces égales chacune à chacune. Donc le dièdre AC est égal à CD ou à BD, etc. Fig. 222.

2° L'*hexaèdre régulier* ou *cube.*

Aux quatre sommets d'un carré, élevez au plan de ce carré et du même côté de ce plan des perpendiculaires égales au côté du carré ; leurs extrémités supérieures détermineront un carré égal au premier, et le cube sera construit.

3° L'*octaèdre régulier.*

Soit BECD un carré, O son centre ; en ce point O élevez au plan BECD une perpendiculaire AF, et prenez-y les deux distances OA, OF égales entre elles et à la demi-diagonale BO ; joignez les points O et F aux quatre sommets du carré ; la figure ABCDEF sera un octaèdre régulier. En effet, les obliques qui partent des points A et F sont égales ; d'ailleurs, les triangles rectangles AOE, OED étant égaux à cause de AO = OD et de OE commun, le côté AE sera égal à ED. Par conséquent, les huit faces du polyèdre sont des triangles équilatéraux égaux. Les angles dièdres sont aussi égaux. Pour le prouver, prenons les angles trièdres ABED, DEAC qui ont les trois faces égales chacune à chacune ; savoir l'angle droit BAD égal à l'angle droit CDE, et les angles BAE, EAD, ADE, ADC égaux comme angles de 60°. Donc aussi le dièdre DAEB est égal au dièdre ADEC. Le même raisonnement s'applique à deux dièdres quelconques. Donc enfin la figure est un octaèdre régulier. Fig. 223.

4° Le *dodécaèdre régulier.*

Avec trois angles AEH, HED, AED égaux entre eux et à l'angle du pentagone régulier, on formera un angle trièdre E ; ses trois dièdres seront égaux. Sur chacun de ces angles AEH, AED, DEH on achèvera un pentagone régulier, en donnant à ces trois polygones des côtés égaux. Soient EABCD, AEHGF, HEDKI ces trois pentagones. Les deux droites AF, AB formeront un angle FAB égal à AEH. Car le trièdre déterminé par les trois arêtes AF, AE, AB et le trièdre E ont deux faces égales également inclinées et sont égaux : donc FAB = AEH. On pourra donc aussi sur FA et AB Fig. 224.

achever un pentagone FAO égal à ABD. On pourra de même placer le pentagone OBM égal aux précédents. Si l'on fait de même sur MCD et sur KDC, les deux plans, ainsi obtenus, se confondront comme faisant avec le plan CDA un angle dièdre égal à HEAD. Cela posé aux points H, F, O, M, K se rencontrent les mêmes circonstances qu'en A, B, C, D. Donc on pourra assembler en ces points cinq nouveaux pentagones égaux entre eux et aux six précédents; ces figures ne laisseront plus que l'espace vide *abcde*, circonscrit par cinq côtés égaux. Or, en chacun des points *a, b, c, d, e* il se passe encore ce que nous avons rencontré en A, B, etc. Donc le plan *abc* contiendra aussi les trois droites *cd, de, ea*, et fera avec chacun des plans adjacents des angles dièdres égaux entre eux et aux autres dièdres de la figure. On aura donc ainsi construit un dodécaèdre régulier.

5° L'*icosaèdre régulier*.

Fig. 225. Soit *abcde* un pentagone régulier, *o* son centre, *of* une perpendiculaire au plan de ce polygone. Dans le plan *aof* décrivez du point *a*, comme centre avec un rayon égal à *ab*, un arc qui coupera cette perpendiculaire *of* en un point *f*; les droites *fe, fd, fc, fb, fa* seront égales entre elles et au côté *ab*; on aura donc, autour du point *f*, cinq triangles équilatéraux égaux. Les plans de ces triangles comprennent des dièdres égaux. Car les dièdres *abfe, bafc* sont égaux comme formés chacun par un angle de pentagone régulier et deux angles de 60°. Donc le dièdre *fb* est égal au dièdre *fa*. On prouvera de même l'égalité des trois autres dièdres avec le dièdre *fa*.

Actuellement, soit ABCDEF un angle polyèdre égal à celui qu'on vient de former; supposons qu'on en ait formé encore plusieurs, tous égaux à celui-là. Prenons-en un second, et superposons deux faces avec les triangles ADE, ADC, les trois autres viendront se placer en DEK, DIK, DIC, ce qui formera trois faces nouvelles. Un troisième angle pentaèdre sera superposé par trois faces avec les triangles CBA, CAD, CDI; il donnera les deux nouvelles faces CBH, CHI. Un quatrième sera superposé par trois faces avec les triangles BHC, BAC, BAF, et donnera les deux nouvelles faces BHG, BFG. Un cinquième sera superposé sur les trois triangles FBG, FBA, AFE; il donnera encore deux faces FGL, FLE. Autour du point E se trouvent assemblés quatre triangles EDK, EDA, EAF, EFL, comprenant des angles dièdres tous égaux à ceux de l'angle *f*. Si donc on place sur ces quatre faces un nouvel angle égal à *f*, on obtiendra encore une face LEK, ce qui forme en tout quinze faces égales et également inclinées. Sur les trois faces IKD, DKE, LKE on superposera un nouvel angle pentraèdre, et l'on aura les deux nouvelles faces LKM, MKI. Au point I sur les quatre faces



HIC, CID, DIK, IKM on en superposera encore un, qui donnera la nouvelle face KIM. Au point H on fera de même, et l'on aura la nouvelle face HGM, ainsi qu'au point G, ce qui fournira encore une face GML. On aura donc en M cinq faces, ce qui donne les vingt faces.

* PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

A tout polyèdre régulier on peut inscrire et circonscrire une sphère. Fig. 226.

Soit AB l'arête commune à deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier, C, D leurs centres, E le milieu de AB; les droites CE, DE seront perpendiculaires à AB, ainsi que leur plan CED. Dans ce plan CED soient menées les droites CO, DO respectivement perpendiculaires à CE et DE; elles se couperont en un point O, et si l'on joint les points O et E, les triangles OCE, OED seront rectangles en C et D; ils auront les côtés CE, ED égaux comme apothèmes de polygones réguliers égaux; l'hypothénuse OE est d'ailleurs commune; donc ils sont égaux comme ayant deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand côté égal. Par suite CO = DO. Soit maintenant FG un second côté de la face qui a le point D pour centre, I le centre d'une troisième face dont FG fait aussi partie. En ce point I élevons à cette face une perpendiculaire; je dis qu'elle passera au point O. Car elle coupera DO de même que DO rencontre CO; supposons que cette perpendiculaire soit IO′, et qu'elle rencontre DO en O′. Menez les apothèmes DH, IH; joignez HO′. On prouvera que les triangles DHO′, IHO′ sont égaux, de sorte que les angles DHO′, O′HI le sont aussi. Or, DHI est la mesure du dièdre GF, comme CED est celle du dièdre AB; ces dièdres sont égaux, puisque le polyèdre est régulier; donc les angles DHO′, DEO sont aussi égaux comme étant les moitiés des mesures de ces dièdres. Il s'ensuit que les triangles rectangles HDO′, DEO ont, outre les angles droits en D, un angle aigu égal, et le côté DH = DE. Donc ils sont égaux, et le côté DO′ = DO, ce qui exige que IO′ se confonde avec IO. Ainsi, les perpendiculaires élevées aux centres des faces du polyèdre se coupent en un même point O et sont égales. Ce point O est donc le centre de la sphère inscrite et OC en est le rayon.

En second lieu les distances du point O aux sommets A, B, G, F sont égales, comme obliques s'écartant également de perpendiculaires égales. Donc le point O est aussi le centre de la sphère circonscrite, et AO est le rayon de cette sphère.

*

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÈME.

Le nombre des sommets d'un polyèdre, augmenté du nombre des faces, est égal au nombre des arêtes plus deux.

Prenez dans l'intérieur du polyèdre un point d'où vous menerez des droites à tous les sommets. En ce même point on placera le centre d'une sphère qui coupera toutes ces droites; enfin, on joindra ces points d'intersection par des arcs de grand cercle, de manière qu'il en résulte sur la surface de la sphère des polygones qui correspondent chacun à une face du polyèdre. Soit F le nombre des faces ou des polygones sphériques; soient s, s', s'', etc., la somme des angles dans le premier, le deuxième, le troisième, etc., de ces polygones sphériques; n, n', n'', etc., les nombres des côtés; les aires de ces polygones seront en somme (p. 32, r. 2)

$$s + 4 - 2n + s' + 4 - 2n' + s'' + 4 - 2n'' + \ldots\ldots$$

le triangle trirectangle étant pris pour unité; mais la somme de ces aires forme l'aire de la sphère qui, dans ce cas, est représentée par huit. Donc on a

$$s + s' + s'' + \text{etc.}, - 2n - 2n' - 2n'' - \text{etc.} + 4\,\mathrm{F} = 8.$$

Car le nombre 4 est répété autant de fois qu'il y a de polygones. Or, autour de chaque sommet il y a quatre angles droits de formés; par conséquent, si l'on nomme S le nombre des sommets, on a

$$s + s' + s'' + \ldots\ldots = 4\,\mathrm{S}.$$

D'ailleurs $n + n' + n'' + \ldots\ldots$ est le nombre des côtés des polygones sphériques, nombre qui est double du nombre des arêtes; nommons A ce dernier nombre; on aura $n + n' + n'' + \ldots\ldots = 2\mathrm{A}$ et la relation ci-dessus devient

$$4\,\mathrm{S} + 4\mathrm{F} - 4\,\mathrm{A} = 8 \qquad \text{ou } \mathrm{S} + \mathrm{F} = \mathrm{A} + 2.$$

Corollaire. L'hexaèdre régulier a 6 faces et 8 sommets; donc $\mathrm{A} = 12$.

L'octaèdre a 8 faces et 6 sommets, d'où $\mathrm{A} = 12$.

Le dodécaèdre a 12 faces et 20 sommets; d'où $\mathrm{A} = 30$.

Enfin, l'icosaèdre a 20 faces et 12 sommets; donc $\mathrm{A} = 30$.



NOTE

SUR LES PROP. 5, 7 DU LIV. 3; PROP. 1, LIV. 4; PROP. 19, LIV. 5; PROP. 11, LIV. 6; PROP. 30, LIV. 7.

—

Dans ces propositions il s'agit de passer du commensurable à l'incommensurable. On a réduit ce passage en principe général (p. 4, l. 3). En faveur des lecteurs qui préfèrent la réduction à l'absurde, on va donner deux exemples de ce genre de démonstration.

Liv. 3, *prop.* 5. Supposons que les arcs BC, BD ne soient pas commensurables entre eux. Je dis qu'on n'en aura pas moins la proposition Fig. 227.

angle BAC : *angle* BAD :: BC : BD.

Car si cette proposition n'est pas vraie, on pourra la rectifier en changeant le quatrième terme. Supposons que le quatrième terme soit BO, de sorte que

BAC : BAD :: BC : BO.

Divisons l'arc BC en parties égales moindres que BO ; il y aura au moins un point de division entre D et O. Soit I ce point, et soit joint AI. Puisque l'arc BI contient un certain nombre de parties égales de l'arc BC, les arcs BC, BI seront commensurables, et d'après ce qu'on vient de prouver, on aura

BAC : BAI :: BC : BI.

Cette proportion et la précédente ayant les mêmes antécédents, on en conclut que

BAD : BAI :: BO : BI.

Or, dans cette proportion, le premier antécédent BAD est plus petit que son conséquent BAI, tandis que le second antécédent BO est plus grand que son conséquent BI, ce qui est absurde. Donc on ne peut pas supposer que le quatrième terme de notre proportion soit plus grand que BD; on démontre de même que ce quatrième terme ne saurait être plus petit que BD ; donc il est BD, et l'on a dans tous les cas la proportion

BAC : BAD :: BC : BD.

Fig. 228. *Liv. 4, prop. 1.* Supposons que dans les parallélogrammes, les côtés AD, AG soient commensurables entre eux, sans que AB et AE le soient; on n'en aura pas moins

$$ABCD : AEFG :: AD \times AB : AG \times AE.$$

Car si cette proportion est fausse, on pourra la rectifier en changeant le facteur AE du quatrième terme. Supposons que ce facteur doive être AH, et qu'on ait

$$ABCD : AEFG :: AD \times AB : AG \times AH.$$

Divisez AB en parties égales plus petites que EH; il y aura entre E et H au moins un point de division; soit I ce point. Achevez le parallélogramme AIKG, qui aura ses côtés commensurables avec ceux de ABCD et donnera

$$ABCD : AIKG :: AD \times AB : AG \times AI.$$

La comparaison de ces proportions donne

$$AEFG : AIKG :: AG \times AH : AG \times AI \text{ ou } :: AH : AI.$$

proportion absurde, puisque AEFG est $<$ AIKG, tandis que AH est $>$ AI. On démontre de même qu'aucun autre facteur ne peut remplacer AE. Donc enfin

$$ABCD : AEFG :: AB \times AD : AE \times AG.$$

Maintenant on peut supposer que AG et AD ne soient pas non plus commensurables entre eux, et en répétant le même raisonnement, on prouvera que la proportion ci-dessus est exacte dans tous les cas.

NOTE POUR LA PAGE 101.

L'extraction de la racine carrée peut s'abréger en vertu d'un principe d'algèbre que voici :

Soient a, b *deux nombres dont la différence est moindre que* $\frac{1}{10^n}$ *et qui sont d'ailleurs tels que* $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ *n'est pas moindre que* 1 : *la différence entre la moyenne arithmétique* $\frac{a+b}{2}$ *et la moyenne géométrique* $\sqrt{ab}$ *sera moindre que* $\frac{1}{10^{2n}}$.

$$\text{Car } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} =$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}; \text{ or puisque}$$

$$a-b < \frac{1}{10^n}, \text{ on a } (a-b)^2 < \frac{1}{10^{2n}}.$$



Comme d'ailleurs $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ est au moins égal à 1, on en conclut que

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{1}{10^{2n}}.$$

Donc, dès qu'on arrivera à deux quantités R_i, r_{i+1} qui auront de commun, à droite de la virgule, la moitié des chiffres qu'on veut conserver, au lieu de $\sqrt{R_i \cdot r_{i+1}}$ on prendra $\frac{R_i+r_{i+1}}{2}$; le résultat sera le même.

Théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre.

1. *Théorème.* Si deux droites AD, DB rencontrent une droite EC de manière que les angles ADE, CDB, non adjacents, soient égaux, DB sera le prolongement de AD. Fig. 5.

2. *Th.* Si quatre droites AD, DB, CD, DE concourent en un point D, de façon que les angles non adjacents soient égaux, savoir ADE = CDB, ADC = EDB, il en résulte que DB est le prolongement de AD et DE le prolongement de CD. Fig. 5.

3. *Problème.* D'un point pris dans un angle mener une droite également inclinée sur les côtés de cet angle.

Construire un quadrilatère, connaissant:

4. *Pr.* Les 4 côtés et un angle;

5. *Pr.* Les 4 côtés et une diagonale;

6. *Pr.* Trois côtés et les deux diagonales;

7. *Pr.* Deux côtés adjacents, les deux diagonales et un angle non compris entre les deux côtés donnés. Ce problème présente deux cas par rapport à la position de l'angle donné;

8. *Pr.* Deux côtés opposés, les deux diagonales et un angle;

9. *Pr.* Un côté et les quatre segments des diagonales;

10. *Pr.* Décrire un trapèze connaissant les quatre côtés (sachant quels sont les côtés qui doivent être parallèles);

11. *Pr.* Étant données deux droites MN, PQ, on prend sur la droite MN un point A, et on demande de trouver sur PQ un point B tel que si de ce point on mène sur MN une perpendiculaire BC, elle soit égale à CA. (Le lecteur est prié de faire la figure);

12. *Th.* Dans un pentagone il ne saurait y avoir plus de trois angles qui soient droits;

13. *Th.* Si du point d'intersection des deux diagonales d'un parallélogramme, on mène deux droites quelconques, les points où elles rencontrent les côtés sont les quatre sommets d'un nouveau parallélogramme.

14. *Pr.* Par deux points donnés faire passer un cercle qui ait son centre sur une ligne donnée;

15. *Th.* Un quadrilatère est inscriptible si les angles opposés sont supplémentaires;

16. *Th.* Dans un quadrilatère circonscrit la somme des côtés opposés est constante;

17. *Th.* Réciproquement, si dans un quadrilatère la somme de deux côtés opposés est égale à celle des deux autres, on peut inscrire un cercle dans ce quadrilatère;

18. *Pr.* Par un point pris dans un cercle mener une corde de longueur donnée, déterminer les limites entre lesquelles la longueur donnée doit être comprise pour que le problème soit possible;

19. *Pr.* Par un point pris dans un cercle mener une corde telle que la différence des segments dans lesquels ce point divise la corde soit égale à une longueur donnée.

20. *Pr.* Par un point extérieur à un cercle mener une sécante telle que la partie interceptée dans le cercle soit égale à une longueur donnée.

21. *Pr.* Deux cercles étant donnés, mener une sécante



telle que les parties interceptées dans les cercles soient égales à des longueurs données.

Construire un triangle connaissant :

22. *Pr.* La base, la hauteur et un angle à la base;

23. *Pr.* La base, la hauteur et l'angle au sommet;

24. *Pr.* La base, un angle adjacent et la somme des deux autres côtés;

25. *Pr.* La base, un angle adjacent et la différence des deux autres côtés;

26. *Pr.* La base, l'angle au sommet et la somme des deux autres côtés;

27. *Pr.* La base, l'angle au sommet et la différence des deux autres côtés;

28. *Pr.* La base, l'angle au sommet et le rayon du cercle inscrit;

29. *Pr.* Deux côtés et le rayon du cercle circonscrit;

30. *Pr.* Les angles adjacents à la base et la hauteur;

31. *Pr.* La base et les droites menées des extrémités de cette base aux milieux des côtés opposés;

32. *Pr.* La base et les perpendiculaires menées des extrémités de cette base sur les côtés opposés;

33. *Pr.* Deux côtés et la droite qui va de leur point d'intersection au milieu du troisième.

34. *Pr.* Par un point donné dans un angle mener une droite qui forme avec cet angle un triangle tel que la somme des côtés adjacents à l'angle donné soit égale à une ligne donnée.

35. *Pr.* Par un point donné dans un angle, mener une droite telle que les distances du point donné aux points où cette droite rencontre les côtés de l'angle ou leurs prolongements, soient dans un rapport donné.

36. *Pr.* Étant donnés deux points sur un cercle et une tangente à un troisième point, trouver sur cette tangente un point tel que l'angle formé par les droites qui joignent ce

dernier point aux deux premiers, soit le plus grand possible.

37. *Pr.* On donne les diagonales d'un quadrilatère inscrit, l'angle qu'elles comprennent et l'angle de deux côtés adjacents; construire ce quadrilatère.

38. *Th.* Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère, se coupent mutuellement en deux parties égales.

Décrire un cercle :

39. *Pr.* Tangent à deux droites données et ayant son centre sur une droite donnée;

40. *Pr.* Tangent à deux droites et passant en un point donné;

41. *Pr.* Tangent à deux droites et ayant un rayon donné;

42. *Pr.* Passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée;

43. *Pr.* Tangent à une droite, passant en un point et ayant un rayon donné;

44. *Pr.* Tangent à une droite, passant en un point, ayant son centre sur une droite donnée;

45. *Pr.* Par deux points donnés mener un cercle qui coupe une circonférence donnée en deux parties égales.

46. *Pr.* Par deux points donnés faire passer un cercle qui coupe un cercle donné, de manière que la corde commune soit égale à une ligne donnée.

47. *Pr.* Dans un cercle donné inscrire trois ou plus de trois cercles égaux tangents entre eux et au cercle donné.

48. *Pr.* Des trois sommets d'un triangle donné, pris pour centres, décrire trois cercles tangents deux à deux.

49. *Pr.* Inscrire un carré dans un triangle.

50. *Pr.* Étant donnés deux points sur une circonférence, y déterminer un troisième tel que les cordes qui le joignent aux deux autres soient dans un rapport donné.

51. *Pr.* Étant donnés deux points A, B hors d'un cercle, déterminer sur la circonférence un point C tel que les



points où les droites AC, BC coupent en outre la circonférence, soient sur une parallèle à AB.

52. *Th.* La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur à un triangle équilatéral, sur les côtés, est égale à la hauteur.

53. *Th.* Dans tout triangle on a Fig. 99

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1. \text{ Et } \frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=2.$$

54. *Pr.* D'un point pris sur le plan d'un parallélogramme, mener une droite qui divise l'aire de cette figure en deux parties équivalentes.

55. *Pr.* D'un point pris sur un côté d'un triangle, tirer une droite qui divise le triangle en deux parties équivalentes.

56. *Pr.* Trouver dans un triangle un point tel que les droites menées de ce point aux trois sommets, divisent le triangle en trois parties équivalentes.

57. *Pr.* D'un point pris dans un triangle, tirer trois sécantes qui divisent le triangle en trois segments équivalents.

58. *Th.* Dans tout parallélogramme la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

59. *Th.* Réciproquement, si dans un qnadrilatère convexe, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, ce quadrilatère est un parallélogramme.

60. *Th.* Si l'on joint les milieux des côtés adjacents d'un quadrilatère, la figure ainsi formée est un parallélogramme dont l'aire est la moitié de celle du quadrilatère donné.

61. *Pr.* D'un point O mener une corde AB telle que le rectangle AB × AO soit égal à un carré donné. Fig. 78.

Fig. 79. 62. *Pr.* D'un point O pris hors d'un cercle, mener une sécante telle que le rectangle AO × AB soit égal à un carré donné.

63. *Pr.* D'un point, pris dans le plan d'un angle, tirer une sécante telle que le rectangle des segments soit égal à un carré donné.

64. *Pr.* Étant donnés une droite et un cercle, trouver sur la droite un point tel qu'en menant de ce point une sécante; le rectangle des deux segments soustractifs terminés à ce point, soit égal à un carré donné.

65. *Pr.* Sur un diamètre AB d'un cercle, trouver un point D tel que si par ce point on mène une corde EDF, faisant avec AB un angle donné, le carré de DE soit au rectangle AD × DB dans un rapport donné.

66. *Pr.* Diviser une droite de longueur donnée en deux segments dont les carrés soient dans un rapport donné.

67. *Pr.* Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté.

68. *Th.* Si dans un cercle deux cordent se coupent à angle droit, la somme des carrés des quatre segments est égale au carré du diamètre.

69. *Pr.* Étant donné le rayon d'un cercle, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrits et circonscrits de trois et de six côtés.

70. *Pr.* Étant donné le rayon d'un cercle, trouver la surface du décagone régulier inscrit et celle du décagone régulier circonscrit.

71. *Th.* Si une droite A est perpendiculaire à un plan M, tout plan, parallèle à la droite A, est perpendiculaire au plan M.

72. *Th* Si deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite, perpendiculaire à l'un, est parallèle à l'autre, ou y est contenue tout entière.

73. *Th.* Si deux plans M, N sont respectivement paral-



lèles à deux autres plans M′, N′, l'intersection des deux premiers est parallèle à celle des deux derniers.

74. *Th.* Si deux droites se coupent, deux plans respectivement perpendiculaires à ces droites, se coupent aussi.

75. *Th.* Si une droite A rencontre un plan F, un plan A′, perpendiculaire à A et une droite F′, perpendiculaire à F, se rencontrent aussi.

76. *Th.* Le plan perpendiculaire au milieu d'une droite, est le lieu des points également distants des extrémités de la droite.

77. *Th.* Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu de tous les points *intérieurs*, également distants des faces.

78. *Th.* Les plans perpendiculaires aux milieux des six arêtes d'un tétraèdre, se coupent en un même point.

79. *Th.* Les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se coupent en un point également distant des quatre faces.

80. *Th.* Sur chacune des quatre faces d'un tétraèdre, déterminez le point situé à l'intersection des droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés; les quatre droites qui, dans le tétraèdre, joignent ces points aux sommets opposés, se coupent en un point situé au quart de la hauteur, par rapport à chaque face prise pour base.

81. *Pr.* Diviser un tétraèdre en quatre parties équivalentes par des plans partant d'un point intérieur et menés par les six arêtes.

82. *Pr.* Par une droite située sur une face d'un tétraèdre, mener un plan qui coupe le tétraèdre en deux parties équivalentes.

83. *Th.* Si trois sphères se coupent deux à deux, il y a deux points communs aux surfaces de ces trois sphères.

84. *Th.* Tout point, extérieur à une sphère, peut être regardé comme le sommet d'un cône droit qui enveloppe



la sphère, avec laquelle il a de commun une circonférence de cercle; en chaque point de cette circonférence, le plan tangent à la sphère est aussi tangent au cône et réciproquement.

85. *Th.* Par tout point, extérieur à deux sphères extérieures l'une à l'autre, on peut mener quatre plans tangents communs.

86. *Th.* Étant données trois sphères dont chacune est extérieure aux deux autres, on peut toujours leur mener huit plans tangents communs. (De là, on déduit fort simplement les axes de similitude de trois cercles).

87. *Th.* Si l'on regarde chaque point d'une droite comme le sommet d'un cône circonscrit à une sphère donnée (84), les plans des cercles de contact de ces cônes et de la sphère se coupent tous suivant une droite perpendiculaire au plan mené par le centre de la sphère et la droite donnée. (C'est de là que Monge a déduit les pôles et les polaires).

88. *Pr.* Trouver le volume et la surface des cônes *équilatéraux* inscrit et circonscrit à une sphère.

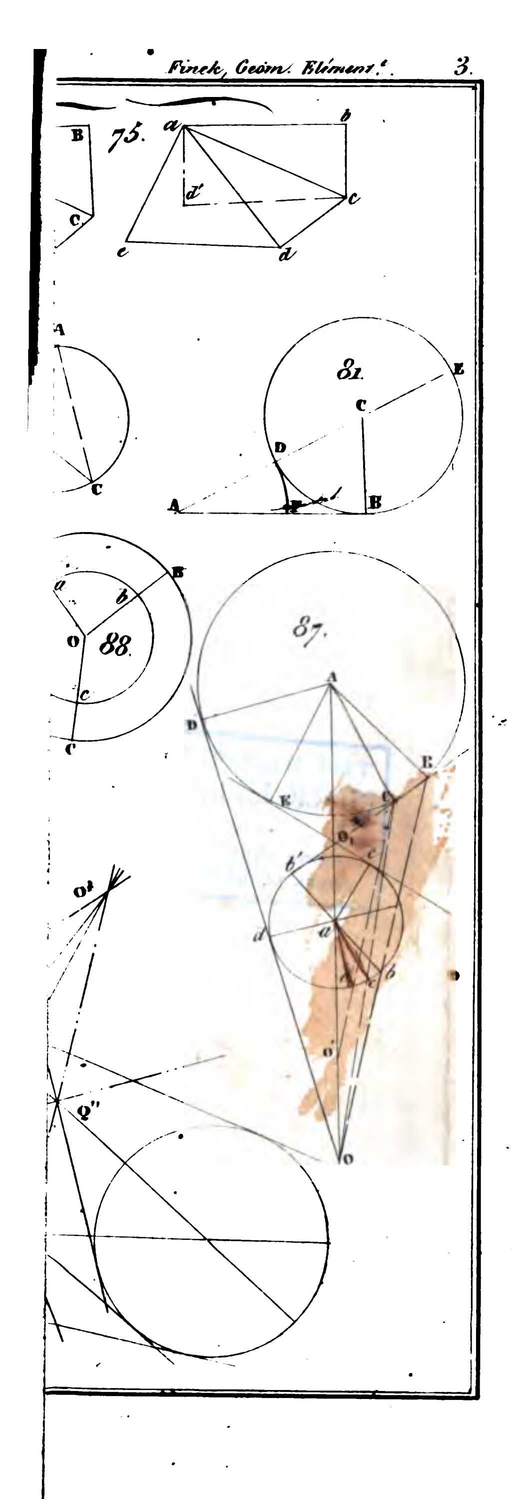
89. *Pr.* Trouver l'angle dièdre d'un polyèdre régulier dont on a la face.

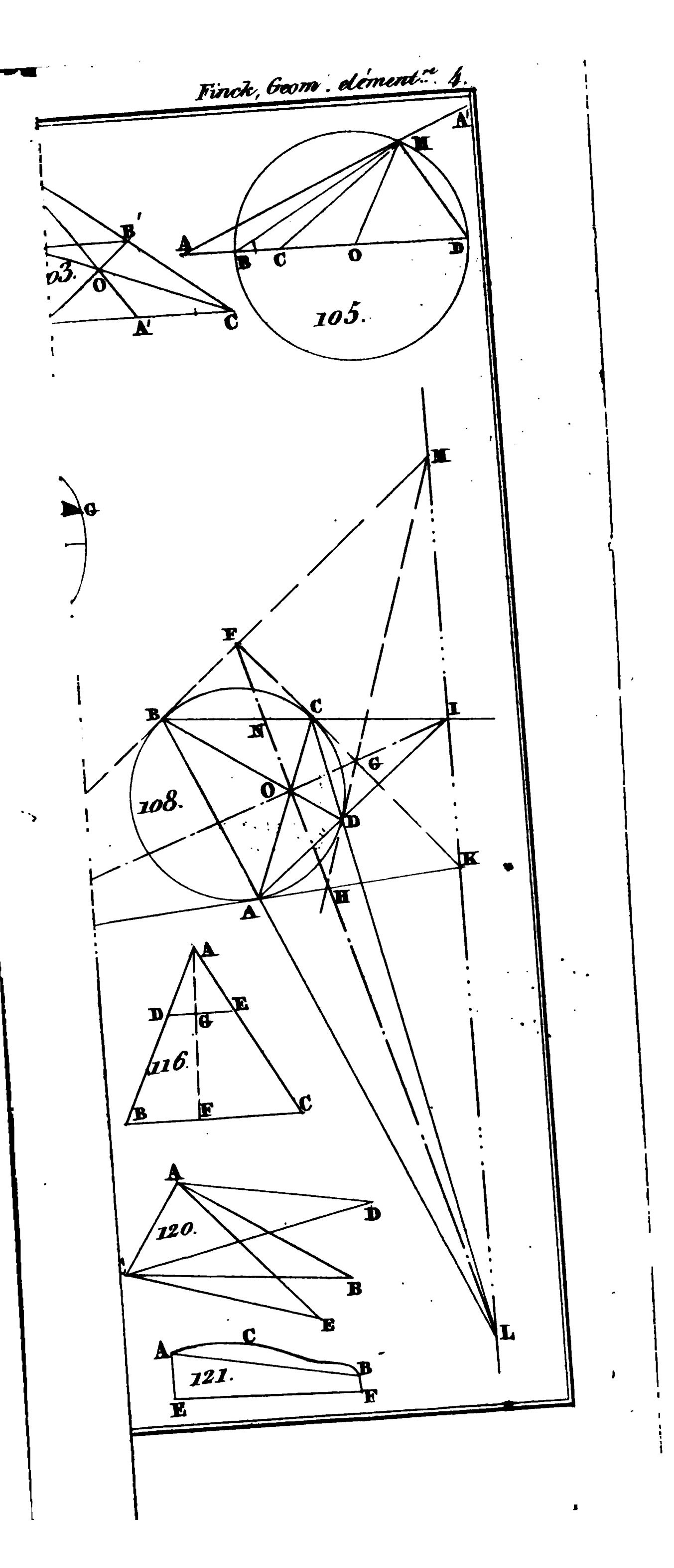
90. *Pr.* Trouver le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier dont on a la face.

FIN.

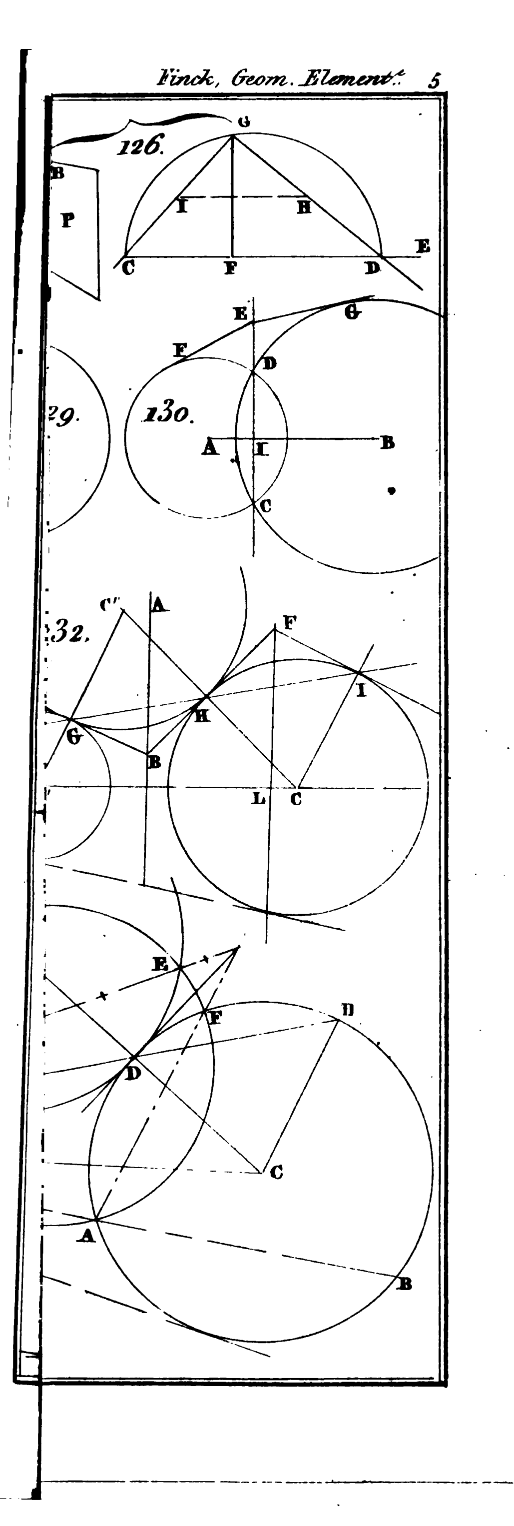


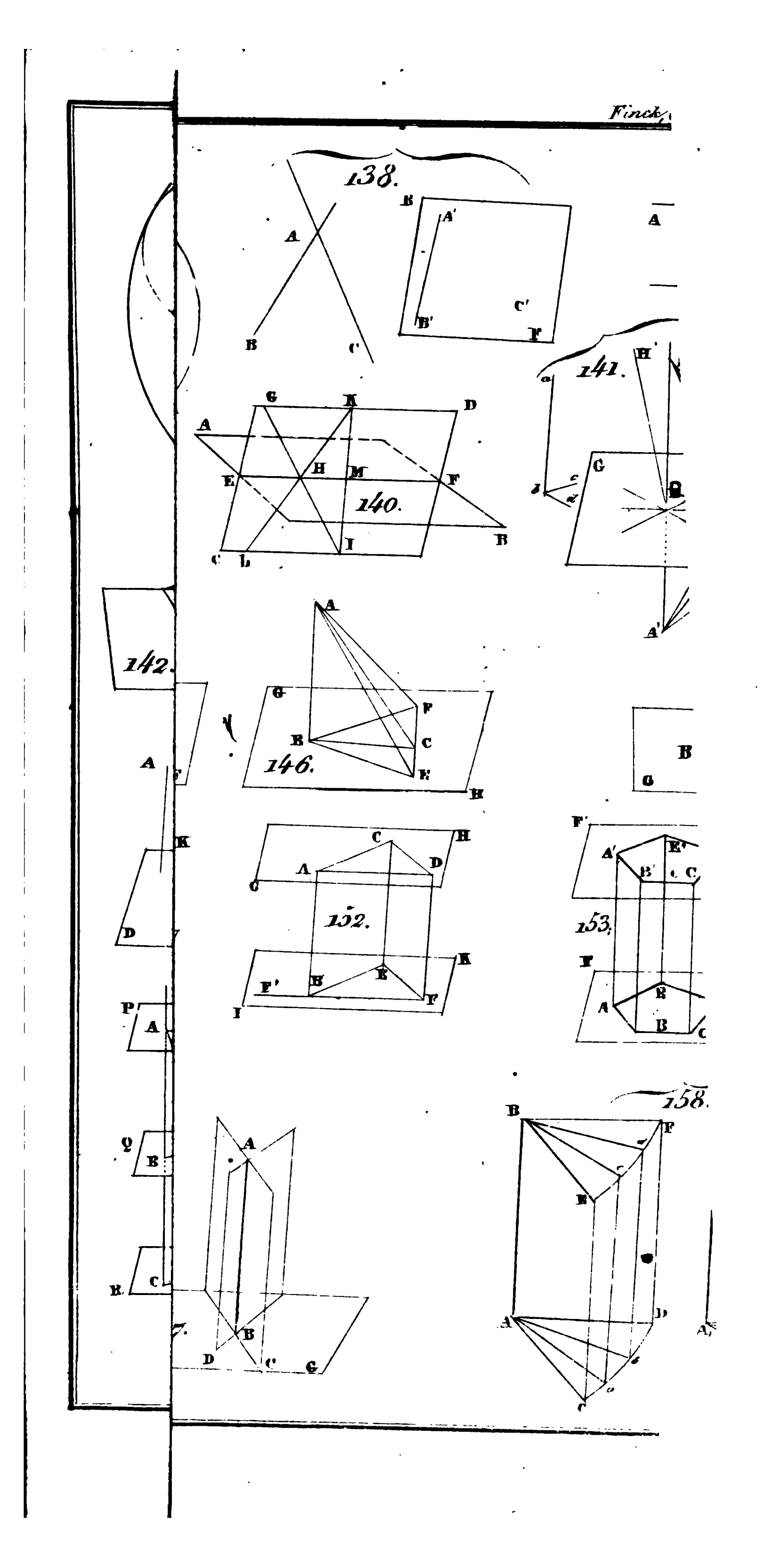
B
C
A
a

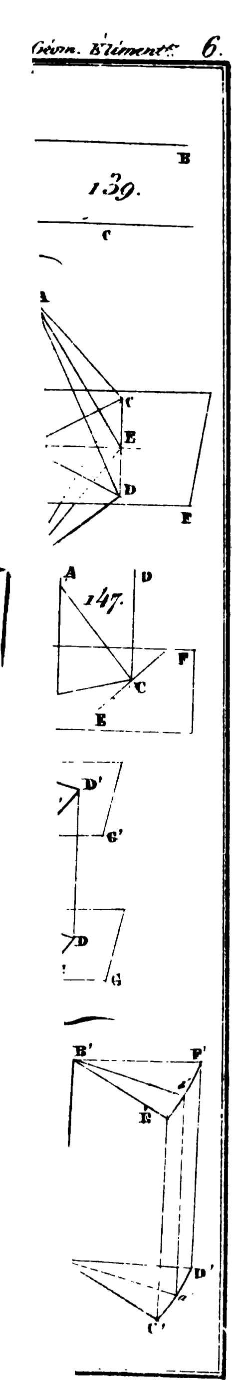

75.
a
b
d'
c
d
e
B
C
A
C
81.
E
C
D
A
B
88.
B
a
b
O
c
C
87.
A
D
E
B
C
O,
b'
c
d
a
b
o'
O
O'
Q''

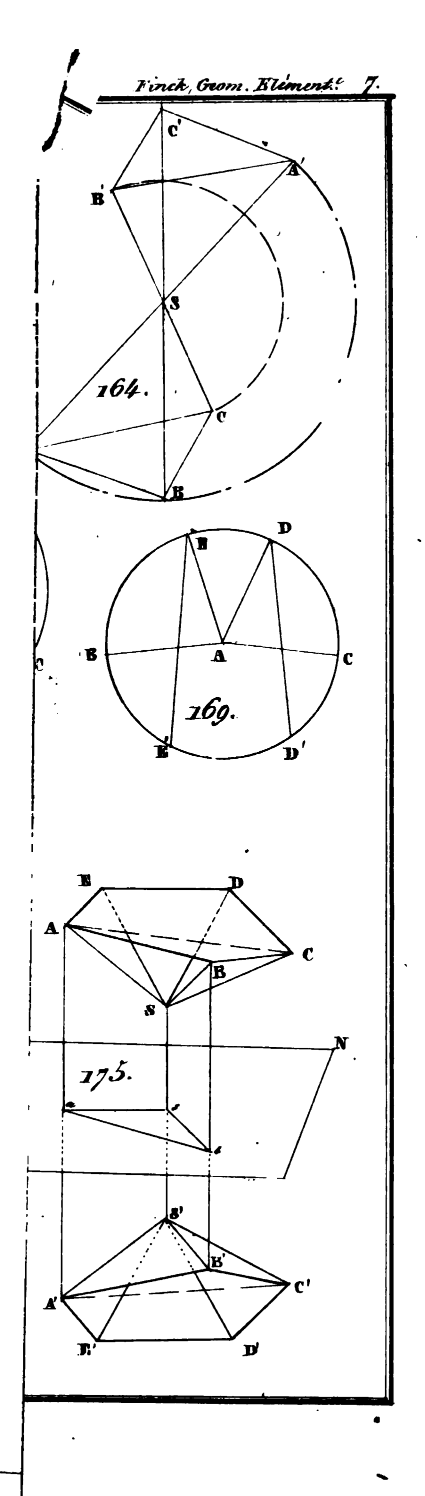


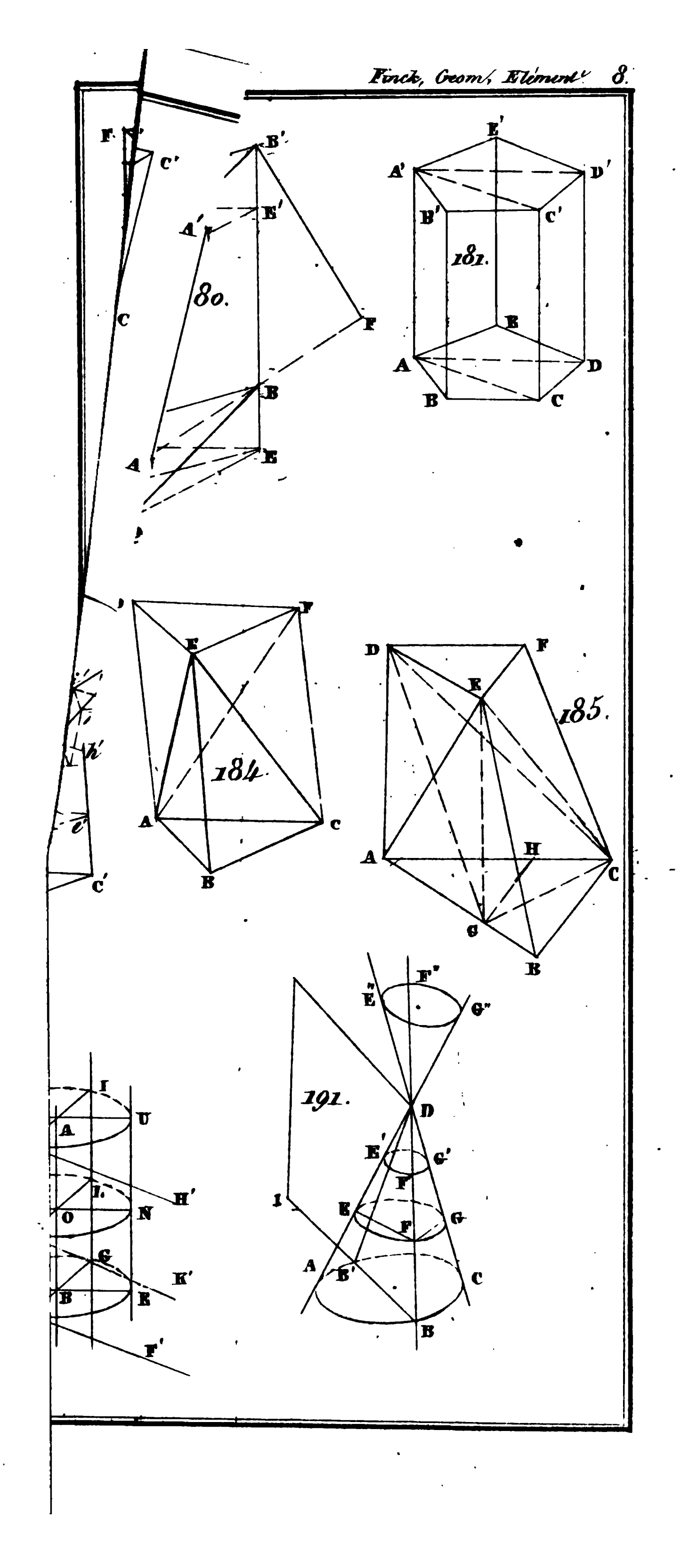
103.
105.
108.
116.
120.
121.

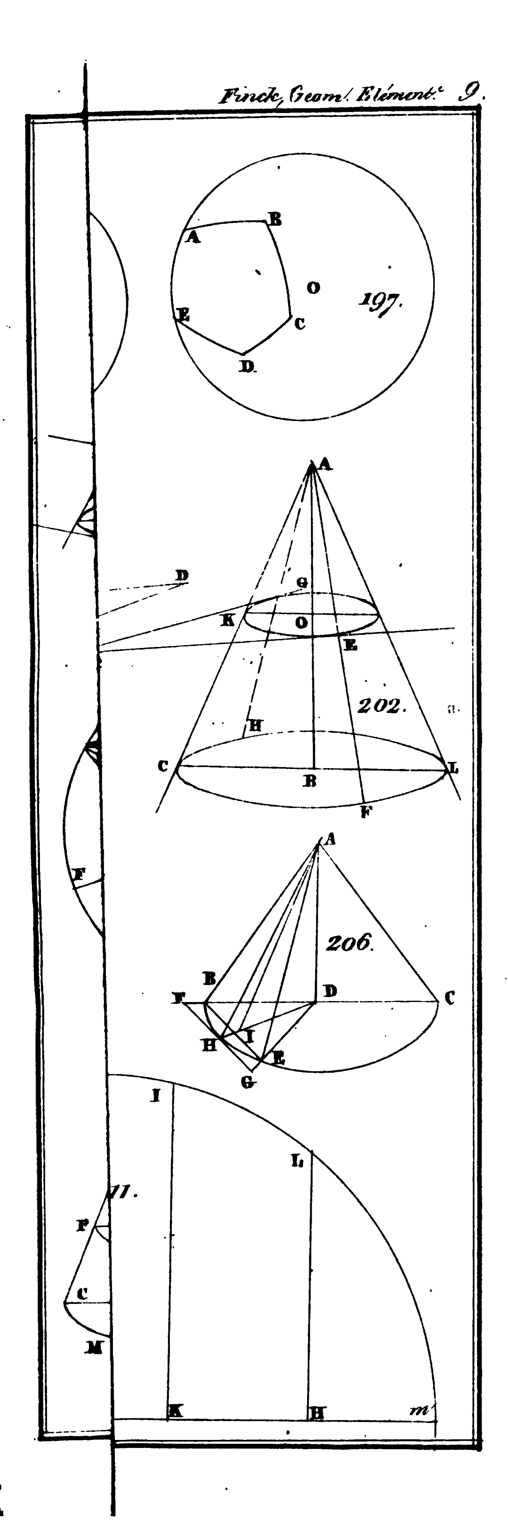

126.
G
B
P
I
H
E
C
F
D
E
G
F
D
29.
130.
A
I
B
C
C
A
32.
F
I
H
G
B
L
C
E
F
D
D
C
A
B

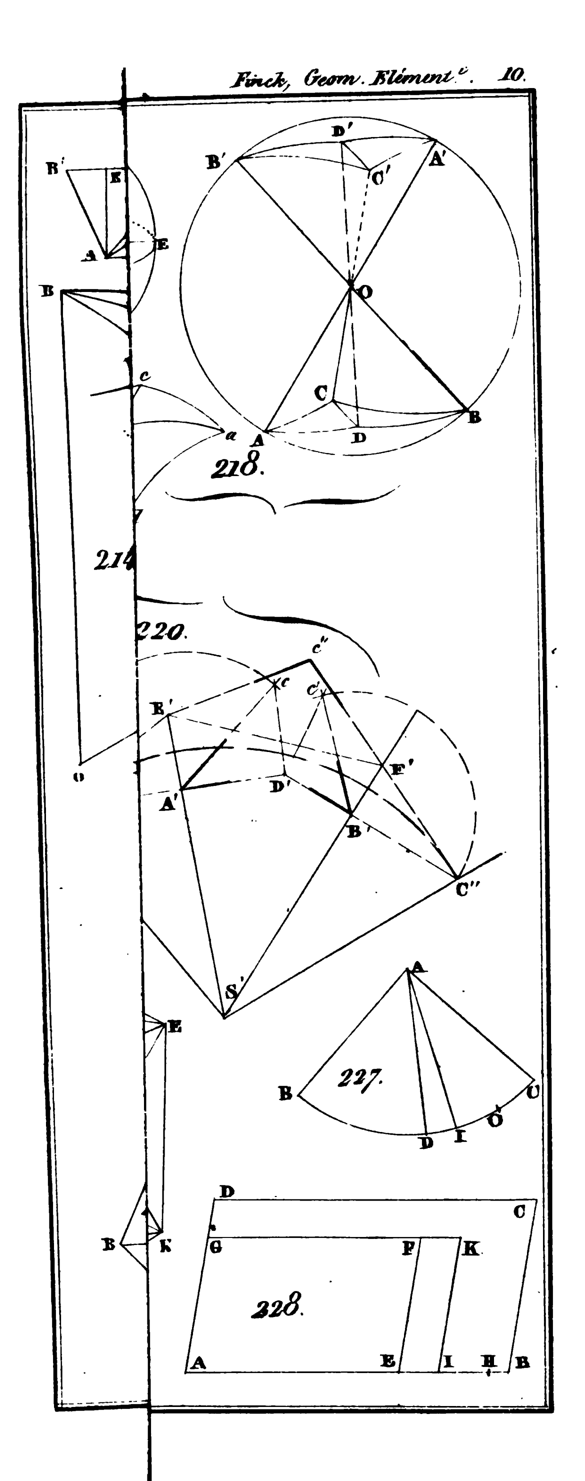

Finck
138.
140.
141.
142.
146.
152.
153.
158.


B
139.
C
A
C
E
D
F
A
D
147.
F
C
E
D'
G'
D
G
B'
F'
E
D'
C'


C'
A'
B'
S
164.
C
B
D
E
B
A
C
169.
E'
D'
E
D
A
C
B
S
N
175.
S'
B'
C'
A'
E'
D'


80.
181.
184.
185.
191.


A
B
O
197.
E
C
D.
A
D
G
K
O
E
202.
H
C
B
L
F
A
206.
B
F
D
C
H
I
E
G
F
I
L
11.
F
C
M
K
H
m



218.
214
220.
227.
228.
B' D' A' C' O C A D B
B' E A E B c a
c'' c c' E' F' A' D' B' C'' S'
A B D I O U
E B K
D C G F K A E I H B

